

ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՀՏԴ 517.518.86

Լ.Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՆՈՐՄԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Քննարկվում է տարածության գծայնորեն անկախ համախմբի տարրերի միջոցով առավելագույն նորմ ունեցող գծային կոմբինացիայի որոնման խնդիրը, երբ գործակիցները պատկանում են միավոր գնդին, և նվազագույն նորմով գծային կոմբինացիայի որոնման խնդիրը, երբ գործակիցները պատկանում են միավոր գնդային մակերևույթին:

Առանցքային բաներ. գծային կոմբինացիա, ուռուցիկ ֆունկցիա, օրթոգոնալ բազմանդամ:

Էքստրեմալ խնդիրները մաթեմատիկայի զարգացման համար ունեն բացառիկ դեր և նշանակություն: Բավական է հիշատակել հին դարաշրջանից հանրահայտ իզոպերիմետրիկ խնդիրը, որը վերաբերում է նվազագույն պարագծով մեծագույն մակերես սահմանափակող կորի որոնմանը, կամ էլ շատ ավելի ուշ՝ զրոյից նվազագույն շեղմամբ բազմանդամների հայտնաբերումը, որը, բացի գործնական բազմաթիվ կիրառություններից, խթան է հանդիսացել մաթեմատիկայի մի ամբողջ բաժնի՝ մոտարկումների տեսության ստեղծման համար:

Խնդիր 1. Դիցուք X - ը վերջավոր չափանի ունիտար տարածություն է, $\{f_k\}_1^n$ ($n = \dim X \geq 2$) - ը՝ նորմավորված բազիս X - ում և $x \in X$: Ներածենք նշանակում՝ $\Pi = \left\{ z : z \in \mathbb{C}^n, \max_{1 \leq k \leq n} |z_k| \leq 1 \right\}$: Գտնենք

$$\sup_{\{\alpha_k\} \in \Pi} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\| \quad (1)$$

Լեմմա: Դիցուք $\{\alpha_k\} \in \Pi$ և x տարրն ունի հնարավոր ամենամեծ նորմը: Այդ դեպքում $|\alpha_k| = 1$ բոլոր $k = 1, 2, \dots, n$ -երի համար:

Ապացույց: Ենթադրենք, թե հակառակ այն բանին, ինչ պետք է ապացուցել, գոյություն ունի ինչ-որ m համար, այնպիսին, որ $|\langle x, f_m \rangle| < 1$: Նշանակենք

$\{f_p^*\}_1^n$ -ով $\{f_k\}_1^n$ -ի հետ բիօրթոգոնալ համակարգը, այսինքն՝ $\langle f_k, f_p^* \rangle = \delta_{kp}$ (δ_{kp} -ն Կրոնեկերի սիմվոլն է).

Քննարկենք $x + \alpha f_m^*$ գումարը, որտեղ α -ն կճշտգրտվի ստորև: Այս պարագայում

$$\langle x + \alpha f_m^*, f_k \rangle = \langle x, f_k \rangle + \alpha \delta_{km}$$

և

$$\|x + \alpha f_m^*\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, \alpha f_m^* \rangle + |\alpha|^2 \|f_m^*\|^2:$$

Այժմ α -ն ընտրենք այնպես, որ $|\alpha + \langle x, f_m \rangle| = 1$ և $\operatorname{Re} \langle x, \alpha f_m^* \rangle \geq 0$.

Հետևապես $\|x + \alpha f_m^*\| > \|x\|$, ինչն էլ հակասում է $\|x\|$ -ի մեծագույնը լինելու ենթադրությանը:

Նշանակենք $G = \{g_{mk}\}$ -ով $\{f_k\}_1^n$ համախմբությանը ծնված Գրամի մատրիցը:

$$g_{mk} = \langle f_k, f_m \rangle.$$

Ինչպես հայտնի է ([1], գլուխ III, 94)

$$\|x\|^2 = \sum_{m,k=1}^n g_{mk}^{(-1)} \langle x, f_k \rangle \langle f_m, x \rangle,$$

որտեղ $g_{mk}^{(-1)}$ -ը G -ի հակադարձ մատրիցի տարրն է՝

$$g_{mk}^{(-1)} = \langle f_k^*, f_m^* \rangle.$$

Լեմմի պայմանները բավարարող x տարրի համար կունենանք՝

$$\|x\|^2 = \sum_{m,k=1}^n g_{mk}^{(-1)} \xi_m \bar{\xi}_k,$$

որտեղ $|\xi_k| = 1, k = 1, 2, \dots, n$.

Օրինակ 1: Դիցուք $P_4 \subset L^2(0;1)$ ենթատարածությունը կազմված է այն բազմադասերից, որոնց կարգը չի գերազանցում 3-ը: Ընտրենք նորմավորված $\{f_k\} = \{1, \sqrt{3}t, \sqrt{5}t^2, \sqrt{7}t^3\}$ բազիսը: Այսպիսով՝

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{\sqrt{21}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{4} & 1 & \frac{\sqrt{35}}{6} \\ \frac{\sqrt{7}}{4} & \frac{\sqrt{21}}{5} & \frac{\sqrt{35}}{6} & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -40\sqrt{3} & 48\sqrt{5} & -20\sqrt{7} \\ -40\sqrt{3} & 400 & -180\sqrt{15} & 80\sqrt{21} \\ 48\sqrt{5} & -180\sqrt{15} & 1296 & -120\sqrt{35} \\ -20\sqrt{7} & 80\sqrt{21} & -120\sqrt{35} & 400 \end{pmatrix} :$$

Համապատասխան քառակուսային ձևի առավելագույն արժեքը հասանելի կլինի $\xi_k = (-1)^{k+1}$, $k=1,2,3,4$ հավաքածուի համար, ինչին համապատաս-

խանում է $P_3(t) = \sum_{k=1}^4 \langle P_3, f_k \rangle f_k^* = \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} f_k^*$ բազմանդամը, որտեղ

$f_k^* = G^{-1} f_k$: Կատարելով անհրաժեշտ հաշվարկները, կստանանք՝

$$\begin{aligned} f_1^*(t) &= 16 - 120t + 240t^2 - 140t^3, \\ f_2^*(t) &= -40\sqrt{3} + 400\sqrt{3}t - 900\sqrt{3}t^2 + 560\sqrt{3}t^3, \\ f_3^* &= 48\sqrt{5} - 540\sqrt{5}t + 1296\sqrt{5}t^2 - 840\sqrt{5}t^3, \\ f_4^*(t) &= -20\sqrt{7} + 240\sqrt{7}t - 600\sqrt{7}t^2 + 400\sqrt{7}t^3 \end{aligned}$$

և

$$P_3(t) = 16 + 40\sqrt{3} + 48\sqrt{5} + 20\sqrt{7} - (120 + 400\sqrt{3} + 540\sqrt{5} + 240\sqrt{7})t + (240 + 900\sqrt{3} + 1296\sqrt{5} + 600\sqrt{7})t^2 - (140 + 560\sqrt{3} + 840\sqrt{5} + 400\sqrt{7})t^3 :$$

Այս պարագայում

$$\begin{aligned} \max_{\xi} \sum_{m,k=1}^n g_{mk}^{(-1)} \xi_k \bar{\xi}_m &= \sum_{m,k=1}^n |g_{mk}^{(-1)}| = \\ &= 2112 + 80\sqrt{3} + 96\sqrt{5} + 40\sqrt{7} + 360\sqrt{15} + 160\sqrt{21} + 240\sqrt{35}, \end{aligned}$$

Խնդիր 2: Դիցուք X - ը վերջավոր չափանի նորմավորված տարածություն է, $\{f_k\}_1^n$ ($n = \dim X \geq 2$)-ը բազիս X - ում և $\Sigma = \left\{z : z \in \mathbb{C}^n, \max_{1 \leq k \leq n} |z_k| = 1\right\}$ -ն միավոր գնդային մակերևույթն է \mathbb{C}^n -ում: Որոշվում է

$$\inf_{\{\alpha_k\} \in \Sigma} \|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n\| \quad (2)$$

մեծությունը:

Քանի որ $\{\alpha_k\} \mapsto \|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n\|$ բանաձևով որոշվող

$A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ արտապատկերումը անընդհատ է, իսկ Σ -ն կոմպակտ է \mathbb{C}^n -ում, ապա նվազագույն նորմով տարրը գոյություն ունի: Ինչպես ցուց է տալիս օրթոնորմալ համախմբի օրինակը, նույնիսկ այդպիսի խիստ սահմանափակ իրադրությունում չի կարելի երաշխավորել նվազագույն նորմով տարրի միակությունը:

Դիցուք $a, b \in X$ և $\lambda \in \mathbb{C}$: Քննարկենք $f(\lambda) = \|a - \lambda b\|$ ֆունկցիան: Ցանկացած $\mu \in \mathbb{C}$ -ի և $t \in [0; 1]$ -ի համար

$$\begin{aligned} f((1-t)\lambda + t\mu) &= \|a - ((1-t)\lambda + t\mu)b\| = \\ &\|(1-t)a - (1-t)\lambda b + ta - t\mu b\| \leq (1-t)\|a - \lambda b\| + \\ &t\|a - \mu b\| = (1-t)f(\lambda) + tf(\mu), \end{aligned}$$

ինչը նշանակում է, որ f ֆունկցիան ուռուցիկ է:

Հայտնի է ([2], գլուխ 1, 3.3, թեորեմ 5), որ ուռուցիկ բազմության վրա որոշված ուռուցիկ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը նաև գլոբալ մինիմում է:

Հիշեցնենք նաև, որ b -ն կոչվում է օրթոգոնալ a տարրին, եթե կամայական $\lambda \in \mathbb{C}$ թվի համար $\|a - \lambda b\| \geq \|a\|$: Ունիտար տարածության դեպքում այս սահմանումը համընկնում է սկալյար արտադրյալով որոշվող օրթոգոնալության հետ:

Լեմմա: Դիցուք $x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n$ -ն (2) խնդրի լուծումն է, ընդ որում՝ $|\alpha_m| < 1$: Այս դեպքում f_m -ը օրթոգոնալ է x -ին:

Ապացույց: Դիցուք $|\lambda| < 1 - |\alpha_m|$: Այդ ժամանակ $|\alpha_m - \lambda| < |\lambda| + |\alpha_m| < 1$: Համաձայն x տարրի սահմանման՝ $\|x\| \leq \|x - \lambda f_m\|$, ինչ նշանակում է, որ f

Ֆունկցիայի համար 0 -ն լրկալ միներմումի կետ է: Հետևաբար, այն նաև գլոբալ միներմումի կետ է, ինչից էլ բխում է f_m -ի օրթոգոնալությունը x -ին:

Օրինակ 2: Գտնենք (2) խնդրի լուծումը $L^2(-1;1)$ տարածությունում, երբ $n = 5$, այսինքն՝ անհրաժեշտ է գտնել այն բազմանդամը, որի կարգը չի գերազանցում 4 , գործակիցները մոդուլով չեն գերազանցում 1 , և որն ունենա նվազագույն հնարավոր նորմը:

Սիմետրիայի նկատառումներից հետևում է, որ որոնելի բազմանդամը պետք է պարունակի անհայտի միայն զույգ կամ միայն կենտ աստիճաններ: Մոնոտոնության նկատառումներից հետևում է, որ բազմանդամի կարգը պետք է լինի 4 : Ինչպես հայտնի է ([3], գլուխ II, 2,1,(4)), միավորի հավասար ավագ անդամի գործակցով նվազագույն նորմով բազմանդամը տվյալ կարգի օրթոգոնալ բազմանդամն է: Այս դեպքում դա $x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$ բազմանդամն է, որի նորմը

հավասար է $\frac{8\sqrt{2}}{105}$:

Եթե $L^2(-1;1)$ տարածությունում ներմուծվի կշիռ $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

ապա վերոնշյալ խնդիրը կունենա այլ լուծում $p(x) = \frac{16}{17}x^4 - x^2 + \frac{5}{34}$, որի

նորմը կլինի $\sqrt{\frac{\pi}{136}}$:

Օրինակ 3: Երկրորդից ոչ բարձր կարգի նվազագույն $L^2(0;1)$ նորմով բազմանդամը, որի գործակիցները պատկանում են Σ -ին, ունի հետևյալ տեսքը՝

$p_2(x) = \frac{15}{16}x^2 - x + \frac{3}{16}$, որի նորմը հավասար է $\frac{\sqrt{3}}{24}$:

Նշենք, որ ունիտար տարածությունում նվազագույն նորմով բազմանդամը համընկնում է բազիսային տարրերի հետ բիօրթոգոնալ համախմբի տարրերից մեկին:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ.- М.: Наука, 196.- 476 с.
2. Мину М. Математическое программирование.- М.: Наука, 1990.- 489 с.
3. Szego G. Orthogonal Polynomials.-AMS publ., New York, 1959.- 500p.

Л.З. ГЕВОРГЯН

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НОРМ ПОЛИНОМОВ

Изучаются две задачи: первая задача относится к нахождению линейной комбинации с наибольшей нормой совокупности линейно независимых элементов, когда коэффициенты принадлежат единичному шару, а вторая - к нахождению линейной комбинации с минимальной нормой, когда коэффициенты принадлежат единичной сфере.

Ключевые слова: линейная комбинация, выпуклая функция, ортогональный полином.

L.Z. GEVORGYAN

SOME EXTREMAL PROBLEMS FOR POLYNOMIAL'S NORM

Two problems are considered. The first one concerns to the determination of the linear combination of linear independent elements with the greatest norm when the coefficients belong to the unit ball. In the second, the linear combination with the least norm is looked for if the coefficients belong to the unit sphere.

Keywords: linear combination, convex function, orthogonal polynomial.

УДК 514.752 .44

В.А. МИРЗОЯН, Г.С. МАЧКАЛЯН

НОРМАЛЬНО ПЛОСКИЕ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ТЕНЗОРОМ РИЧЧИ

Дано геометрическое описание нормально плоских полусимметрических подмногообразий с параллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах.

Ключевые слова: полусимметрические подмногообразия, эйнштейновы подмногообразия, риччи-полусимметрические подмногообразия.

Введение. Пусть M – m -мерное гладкое риманово многообразие с метрикой g и римановой связностью ∇ . Тензор кривизны R определяется равенством $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$, где X, Y, Z – произвольные касательные векторные поля на M . Тензор Риччи R_1 типа (1,1) определяется следующим образом: если (e_1, \dots, e_m) – локальный базис ортонормальных касательных векторных полей на M , то для любого X полагаем $R_1(X) = \sum_{i=1}^m R(X, e_i)e_i$. При $R_1 = 0$ многообразие M называется риччи-плоским,