Л.З. ГЕВОРГЯН

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НОРМ ПОЛИНОМОВ

Изучаются две задачи: первая задача относится к нахождению линейной комбинации с наибольшей нормой совокупности линейно независимых элементов, когда коэффициенты принадлежат единичному шару, а вторая - к нахождению линейной комбинации с минимальной нормой, когда коэффициенты принадлежат единичной сфере.

Ключевые слова: линейная комбинация, выпуклая функция, ортогональный полином.

L.Z. GEVORGYAN

SOME EXTREMAL PROBLEMS FOR POLYNOMIAL'S NORM

Two problems are considered. The first one concerns to the determination of the linear combination of linear independent elements with the greatest norm when the coefficients belong to the unit ball. In the second, the linear combination with the least norm is looked for if the coefficients belong to the unit sphere.

Keywords: linear combination, convex function, orthogonal polynomial.

УДК 514.752 .44

В.А. МИРЗОЯН, Г.С. МАЧКАЛЯН

НОРМАЛЬНО ПЛОСКИЕ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ТЕНЗОРОМ РИЧЧИ

Дано геометрическое описание нормально плоских полусимметрических подмногообразий с параллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах.

Ключевые слова: полусимметрические подмногообразия, эйнштейновы подмногообразия, риччи-полусимметрические подмногообразия.

Введение. Пусть M – m-мерное гладкое риманово многообразие с метрикой g и римановой связностью ∇. Тензор кривизны R определяется равенством $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$ где X, Y, Z – произвольные касательные векторные поля на M. Тензор Риччи R_1 типа (1,1) определяется следующим образом: если $(e_1,\dots,e_m)$ – локальный базис ортонормальных касательных векторных полей на M, то для любого X полагаем $R_1(X) = \sum_{i=1}^{m} R(X,e_i)e_i$. При $R_1 = 0$ многообразие M называется риччи-плоским, а при $R_1 = \lambda I$ – эйнштейновым, где $\lambda = const$, I – тождественное преобразование. Операторы кривизны $R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ связности ∇ действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M, например,

$$(R(X,Y)R_1)Z = R(X,Y)R_1(Z) - R_1(R(X,Y)Z),$$

$$\begin{aligned}(R(X,Y)R\ )(U,V)W = R(X,Y)(R(U,V)W) - R(R(X,Y)U,V)W - \\ - R(U,R(X,Y)V)W - R(U,V)R(X,Y)W.\end{aligned}$$

При $\nabla R = 0$ M называется локально симметрическим, при $R(X,Y)R = 0$ –полусимметрическим, а при $R(X,Y)R_1 = 0$ – риччи-полусимметрическим. Справедливы импликации:

$$\nabla R = 0 \Rightarrow \nabla R_1 = 0 \Rightarrow R(X,Y)R_1 = 0,\ \nabla R = 0 \Rightarrow R(X,Y)R = 0 \Rightarrow R(X,Y)R_1 = 0.$$

Общая структурная теорема для полусимметрических многообразий была установлена З. Сабо [1], а для риччи-полусимметрических многообразий – автором [2]. Настоящая работа посвящена исследованию нормально плоских полусимметрических подмногообразий в евклидовых пространствах.

1. Пространство дефектности. Пусть M является m-мерным подмногообразием n-мерного евклидова пространства E_n. Если $\tilde{\nabla}$ – риманова связность на E_n, то для любых касательных к M векторных полей X, Y и любого нормального к M векторного поля ξ имеем (см. [3])

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_2(X,Y), \quad \tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi,$$

где $\nabla_X Y$ и $A_\xi(X)$ в точке $x \in M$ принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а $\alpha_2(X,Y)$ и $\nabla_X^\perp \xi$ – нормальному пространству $T_x^\perp(M)$. Связность ∇ является связностью Леви-Чивита, а α_2 – второй фундаментальной формой. В формуле Вейнгартена $\nabla_X^\perp \xi$ определяет в нормальном расслоении $T^\perp(M)$ нормальную связность $\nabla^\perp$. Поскольку A_ξ и α_2 связаны соотношением $\langle \alpha_2(X,Y), \xi \rangle = g(A_\xi(X), Y)$, то в каждой точке $x \in M$ A_ξ является симметрическим линейным преобразованием касательного пространства $T_x(M)$ и называется видовым оператором относительно ξ. Тензоры кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇, $\nabla^\perp$ определяются равенствами

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$
$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]} \xi.$$

При $R = 0$ подмногообразие M называется локально евклидовым, а при $R^{\perp} = 0 -$ нормально плоским. Тензор Риччи R_1 подмногообразия M определяется через тензор кривизны R так же, как и для риманова многообразия.

Пространство дефектности $T_x^{(0)}$ подмногообразия M в точке x определяется равенством

$$T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R(X,Y) = 0 \ \forall Y \in T_x(M)\}.$$

Это понятие было введено и использовано Чженем и Кюйпером [4]. Число $\mu_x = \dim T_x^{(0)}$ называется *индексом дефектности* подмногообразия M в точке x. Интегральное многообразие $M^{(0)}$ распределения $T^{(0)}$ является локально евклидовым в индуцированной метрике и вполне геодезическим в M (см. [4], [5]). Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$ относительно римановой метрики на M называется пространством кодефектности в точке x, а его размерность – индексом кодефектности M в этой точке. Подмногообразие M с ненулевым индексом дефектности называется полуэйнштейновым, если тензор Риччи R_1 в каждой точке $x \in M$ имеет на $T_x^{(1)}$ только одно ненулевое собственное значение [2].

2. Редукция условий. Пусть $O(E_n) -$ главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n. Отождествляя точку x со своим радиус-вектором, будем иметь

$$dx = \omega^A e_A, \ d e_A = \omega_A^B e_B, \ \omega_B^A + \omega_A^B = 0, \ A, B, \ldots = 1, \ldots, n.$$

Отсюда путем внешнего дифференцирования получим следующие структурные уравнения: $d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A$, $d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B$. Если $M - m$-мерное подмногообразие в E_n, тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормреперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что $e_i \in T_x(M)$, $(i, j, \ldots = 1, \ldots, m)$, $e_\alpha \in T_x^{\perp}(M)$, $(\alpha, \beta, \ldots = m+1, \ldots, n)$. В силу этого по известной схеме получим $\omega^\alpha = 0$, $\omega_i^\alpha = h_{ij}^{\alpha} \omega^j$, $h_{ij}^{\alpha} = h_{ji}^{\alpha}$.

Здесь функции h^{α}_{ij} являются компонентами формы α_2. Компоненты R^{j}_{ikl}, $R^{\beta}_{\alpha kl}$, R_{ik} тензоров кривизны R, $R^{\perp}$ и тензора Риччи R_1 выражаются через h^{α}_{ij} по формулам

$$R^{j}_{ikl}=-\sum_{\alpha} h^{\alpha}_{i[k} h^{\alpha}_{l]j},\quad R^{\beta}_{\alpha kl}=-\sum_{i} h^{\alpha}_{i[k} h^{\beta}_{l]i},\quad R_{ik}=R^{l}_{ikl}=\sum_{\alpha}\left(h^{\alpha}_{il} h^{\alpha l}_{k}-H^{\alpha} h^{\alpha}_{ik}\right),$$

где $h^{\alpha l}_{k}=h^{\alpha}_{kl}$, а $H^{\alpha}=\sum_{l} h^{\alpha}_{ll}$ – компоненты вектора средней кривизны H.

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R^{\beta}_{\alpha ij}=0$. Тогда $\sum_{k} h^{\alpha}_{ik} h^{\beta}_{kj}=\sum_{k} h^{\beta}_{ik} h^{\alpha}_{kj}$, и, следовательно, все матрицы $\left\|h^{\alpha}_{ij}\right\|$ коммутируют между собой. В силу этого в некотором ортонормрепере они одновременно могут быть приведены к диагональному виду $\left\|\lambda^{\alpha}_{i}\,\delta_{ij}\right\|$. Легко видеть, что в этом случае $R_{ik}=\rho_i\delta_{ik}$, где $\rho_i=\sum_{\alpha}[\left(\lambda^{\alpha}_{i}\right)^2-H^{\alpha}\lambda^{\alpha}_{i}]$. Это значит, что матрицы $\left\|R_{ik}\right\|$, $\left\|h^{\alpha}_{ij}\right\|$ одновременно приведены к диагональному виду и, следовательно, коммутируют между собой. Тогда подпространства собственных векторов тензора Риччи R_1, отвечающие различным собственным значениям, будут инвариантны относительно операторов A_{ξ} и сопряжены относительно формы α_2 (если X,Y принадлежат различным подпространствам собственных векторов тензора Риччи R_1, то $\alpha_2(X,Y)=0$).

Нормальные векторы $n_i=\lambda^{\alpha}_{i} e_{\alpha}$ называются главными векторами кривизны (г.в.к.) нормально плоского подмногообразия в E_n. Очевидно, что $H=n_1+\cdots+n_m$. Пусть $<,>$ – скалярное произведение в E_n. Тогда

$$\rho_j=\left|n_j\right|^2-<H,n_j>,\ (1)\ k(e_i\wedge e_j)=-R_{ijij}=\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{i}\lambda^{\alpha}_{j}=<n_i,n_j>,$$

$$R_{ijkl}=(\delta_{il}\,\delta_{jk}-\delta_{ik}\,\delta_{jl})\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{i}\lambda^{\alpha}_{j}=(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl})<n_i,n_j>, \qquad (2)$$

где $k(e_i\wedge e_j)$ – секционная кривизна. Если секционная кривизна M постоянна, т.е. $k(e_i\wedge e_j)=<n_i,n_j>=q$, то $R_{jk}=R_{ijkl}\delta^{il}=q(m-1)\delta_{jk}$. В этом случае M

будет риччи-плоским тогда и только тогда, когда оно локально евклидово, т.е. $R_{ijkl} = 0$.

Известно (см. [6],[7]), что для нормально плоского подмногообразия в E_n необходимые и достаточные условия полупараллельности формы α_2, тензора кривизны R и тензора Риччи R_1 в терминах г.в.к. имеют следующий вид:

$$\left(n_i - n_k\right) \cdot < n_i, n_k >= 0, \tag{3}$$

$$< n_i - n_k,\, n_j >< n_i, n_k >= 0, \tag{4}$$

$$< n_i - n_k,\, n_i + n_k - H > \cdot < n_i, n_k >= 0 \tag{5}$$

при любых двух различных значениях индексов в первом и третьем случаях и при любых трёх различных значениях индексов во втором случае. Условие (5) легко преобразовать к виду

$$(\left|n_i\right|^2 - \left|n_k\right|^2 + < H, n_k > - < H, n_i >) < n_i, n_k >= 0$$

или

$$(\, \rho_i - \rho_k \,) < n_i, n_k >= 0. \tag{6}$$

Легко видеть, что из (3) следует (4). Если (4) просуммировать по $j\,(j \neq i, j \neq k)$, то получим (5).

Формула (1) устанавливает соответствие между собственными значениями ρ_j тензора Риччи и г.в.к. n_j. Поскольку векторы n_j могут иметь кратности, то и собственные значения ρ_j могут быть кратными, причём одному и тому же собственному значению ρ_j может соответствовать несколько различных г.в.к.

Из (6) следует, что для нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M справедливы следующие утверждения:

а) если г.в.к. n_i и n_k отвечают различным собственным значениям ρ_i и ρ_k тензора Риччи, то они ортогональны (если $\rho_i \neq \rho_k$, то $< n_i, n_k >= 0$);

б) если векторы n_i и n_k неортогональны, то они соответствуют одному и тому же собственному значению тензора Риччи (если $< n_i, n_k > \neq 0$, то $\rho_i = \rho_k$, и, следовательно, векторы n_i и n_k удовлетворяют условию $< n_i - n_k,\, n_i + n_k - H >= 0$).

Эти утверждения справедливы также для полусимметрического подмногообразия. Однако в этом случае, если $<n_i, n_k> \neq 0$, то $<n_i - n_k, n_j> = 0$ для любого значения индекса $j\,(j \neq i, j \neq k)$. Суммируя последнее равенство по j, получим $<n_i - n_k, n_i + n_k - H> = 0$. Следовательно, при фиксированных значениях индексов i, k условие $<n_i - n_k, n_j> = 0$ для любого значения $j\,(j \neq i, j \neq k)$ означает, что векторы n_i и n_k соответствуют одному собственному значению тензора Риччи.

Пусть тензор Риччи R_1 нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M имеет нулевое собственное значение и ненулевые собственные значения $\rho_1, ..., \rho_t$. Тогда множество всех его г.в.к. можем разбить на группы $W^{(0)}, W^{(1)}, ..., W^{(t)}$, где $W^{(0)}$ состоит из векторов, соответствующих нулевому собственному значению, а $W^{(\varphi)}, \varphi = 1, ..., t$, состоит из векторов, соответствующих ненулевому собственному значению ρ_φ. Согласно доказанному, векторы из разных групп ортогональны. В качестве примера отметим, что для риччи-плоского подмногообразия M множество всех групп г.в.к. сводится только к $W^{(0)}$, для эйнштейнова (но не риччи-плоского) подмногообразия – к группе $W^{(1)}$, а для полуэйнштейнова подмногообразия – к группам $W^{(0)}$, $W^{(1)}$.

3. Полусимметрические подмногообразия. В дальнейшем будем предполагать, что нормально плоское подмногообразие M является полусимметрическим, т.е. для него выполняется условие (4). Если $W^{(0)}, W^{(1)}, ..., W^{(t)}$ – группы его г.в.к., соответствующих собственным значениям тензора Риччи R_1, то в каждой группе $W^{(\varphi)}, \varphi = 1, ..., t$, векторы удовлетворяют условию $<n_i - n_k, n_j> = 0$ при любых трёх различных значениях индексов. Отсюда следует, что каждая группа $W^{(\varphi)}, \varphi = 1, ..., t$ должна состоять из трёх и более векторов с учётом их кратностей. Например, если $W^{(\varphi)}$ состоит только из одного вектора, то его кратность должна быть не менее трёх, если $W^{(\varphi)}$ состоит из двух векторов, то хотя бы один из них должен быть кратным. Группа $W^{(\varphi)}$ может состоять из трёх и более однократных векторов, но она не может состоять из двух однократных векторов.

Рассмотрим группу $W^{(\varphi)}, \varphi > 0$. Векторы $n_{i_\varphi}, n_{j_\varphi}, n_{k_\varphi}$ из этой группы удовлетворяют условию $<n_{i_\varphi} - n_{k_\varphi}, n_{j_\varphi}> = 0$, т.е. $<n_{i_\varphi}, n_{j_\varphi}> = <n_{j_\varphi}, n_{k_\varphi}>$.

Тогда $< n_{i_\varphi}, n_{j_\varphi} >=< n_{j_\varphi}, n_{k_\varphi} >=< n_{k_\varphi}, n_{i_\varphi} >$ в случае только трёх различных значений индексов и $< n_{i_\varphi}, n_{j_\varphi} >=< n_{j_\varphi}, n_{k_\varphi} >=< n_{k_\varphi}, n_{l_\varphi} >$, если число различных значений индексов больше трёх. Отсюда следует, что секционные кривизны $k(e_{i_\varphi} \wedge e_{j_\varphi})$ равны между собой, т.е. $k(e_{i_\varphi} \wedge e_{j_\varphi}) = q_\varphi$. В качестве следствия этих рассуждений отметим, что если нормально плоское полусимметрическое подмногообразие M ($\dim M \geq 3$) является эйнштейновым с ненулевой эйнштейновой константой ρ, то, в силу известной теоремы Шура, оно представляет собой подмногообразие постоянной ненулевой секционной кривизны.

Из формулы (1) следует, что группа $W^{(0)}$ содержит нулевой г.в.к., а также, может быть, некоторые ненулевые г.в.к. Приведённые выше рассуждения применимы также к группе $W^{(0)}$. Если $W^{(0)}$ содержит нулевой г.в.к., то все секционные кривизны $k(e_{i_0} \wedge e_{j_0})$ будут нулевыми, и, следовательно, все ненулевые г.в.к. в $W^{(0)}$ взаимно ортогональны. В качестве следствия отметим, что если нормально плоское полусимметрическое подмногообразие M ($\dim M \geq 3$) является риччи-плоским и допускает нулевой г.в.к., то оно локально евклидово. Если же все его г.в.к. отличны от нулевого, то M будет иметь постоянную секционную кривизну и, согласно сделанному выше замечанию, будет локально евклидовым.

Теорема 1. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское полусимметрическое эйнштейново подмногообразие M ($\dim M \geq 3$) с ненулевой эйнштейновой константой представляет собой подмногообразие постоянной ненулевой секционной кривизны. Если в E_n нормально плоское полусимметрическое подмногообразие M ($\dim M \geq 3$) является риччи-плоским, то оно локально евклидово.*

В [8] было доказано, что в E_n нормально плоское подмногообразие с параллельным тензором Риччи является прямым произведением эйнштейновых подмногообразий. На основании теоремы 1 можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское полусимметрическое подмногообразие M с параллельным тензором Риччи является прямым произведением подмногообразий постоянной секционной кривизны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Szabo Z.I**. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$. I. The local version // J. Differential Geom. – 1982. - 17**,** № 4. – P. 531-582.
2. **Мирзоян В.А.** Структурные теоремы для римановых Ric-полусимметрических пространств // Изв. Вузов. Математика. -1992. -№6. –С. 80-89.
3. **Chen B.-У.** Geometry of submanifolds. - New York: Marcel Dekker, 1973. -298p.
4. **Chern S. S., Kuiper N.** Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean space //Ann.Math.-1952.- 56, № 3.- P. 422-430.
5. **Мирзоян В.А**. Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий //Матем. сб.– 2006.- 197, №7.– С. 47-76.
6. **Lumiste Ü**. Semiparallelity, semisymmetricity and Ric-semisymmetricity for normally flat submanifolds in Euclidean space // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. - 2002. – 51. -P. 67–85.
7. **Мирзоян В.А.** Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий // Изв. РАН. Сер.матем. - 2003. -67, №5. –С.107-124.
8. **Мирзоян В.А.** Подмногообразие с параллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах // Изв. вузов. Сер. Матем. – 1993, -№ 9. - С. 22-27.

Վ.Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, Գ.Ս. ՄԱՉԿԱԼՅԱՆ

ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՌԻՉՉԻ ԹԵՆԶՈՐՈՎ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՐԹ ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Տրվում է զուգահեռ Ռիչչի թենզորով նորմալ հարթ կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը էվկլիդեսյան տարածություններում:

Առանցքային բառեր. կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, էյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ, Ռիչչի–կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ:

V.A. MIRZOYAN, G.S. MACHKALYAN

NORMALLY FLAT SEMISYMMETRIC SUBMANIFOLDS WITH THE PARALLEL RICCI TENSOR

The geometric description of normally flat semisymmetric submanifolds with the parallel Ricci tensor in Euclidean spaces is given.

Keywords: semisymmetric submanifolds, Einstein submanifolds, Ricci-semisymmetric submanifolds.