УДК 517

Р.В. ДАЛЛАКЯН

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ДИРИХЛЕ

В работе приведены некоторые замечания о множестве нулей аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом Дирихле.

Ключевые слова: классы D_0^2 и H^p, условие Бляшке, множество Бляшке, множество единственности для функций класса D_0^2.

Пусть $\mathbb{D}$ - единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $T = \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$ - единичная окружность. Классом D_0^2 аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций с конечным интегралом Дирихле называется множество тех аналитических в $\mathbb{D}$ функций, которые удовлетворяют следующему условию:

$$\|f\|_{D_0^2} = \left\{ \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \left| f'(z) \right|^2 dxdy \right\}^{1/2} < +\infty; z = x + iy .$$

Нетрудно установить, что если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то

$$f(z) \in D_0^2 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n \left| a_n \right|^2 < +\infty .$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$D_0^2 \subset H^2 .$$

Значит, нули любой функции класса D_0^2 удовлетворяют условию Бляшке, т.е. если $\{a_n\}$ - множество нулей некоторой функции класса D_0^2, то

$$\sum \left(1 - |a_n|\right) < +\infty .$$

Множество $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ называется множеством единственности для класса D_0^2, если не существует функции $f \in D_0^2 \left(f \not\equiv 0\right)$, для которой $f(a_n) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$.

В 1952г. Л. Карлесон показал [1] , что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{1}{1 - |a_n|} \right)^{-(1-\varepsilon)} < +\infty$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, то существует функция $f \in D_0^2 \left(f \not\equiv 0 \right)$ и $f\left(a_n\right) = 0$. Также им было доказано, что есть множество единственности $\{a_n\}$ для класса D_0^2, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{1}{1-|a_n|} \right)^{-(1+\varepsilon)} < +\infty .$$

В [1] также отмечено, что в том случае, когда все члены $\{a_n\}$ лежат на одном радиусе, то для существования $f \in D_0^2 \left(f \not\equiv 0 \right)$ и $f\left(a_n\right) = 0$ необходимо и достаточно выполнение условия Бляшке.

Результаты Л. Карлесона в 1962г. уточнили А. Шапиро и А. Шилдс [2]. Ими доказаны следующие две теоремы.

Теорема. *Если последовательность* $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{1}{1-|a_n|} \right)^{-1} < +\infty , \tag{1}$$

то существует функция $f \in D_0^2 \left(f \not\equiv 0 \right)$ *и* $f\left(a_n\right) = 0$, $n = 1,2,\ldots$.

Теорема. *Пусть* $\varphi(t)$ *- непрерывная функция, для которой* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0 (t > 0)$. *Тогда существует множество единственности* $\{a_n\}$ *для класса* D_0^2, *удовлетворяющее условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{1}{1-|a_n|} \right)^{-1} \cdot \varphi\left(1-|a_n|\right) < +\infty .$$

Для классов $D^2(\omega)$ (см. [3]) аналогичные результаты получены В. Захаряном в 1970г. В 1978г., пользуясь одним представлением М. Джрбашяна, А. Вагаршакян [4] получил следующий результат.

Теорема. *Пусть* $f(z) \in D_0^2$ *и* $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ *- множество нулей этой функции. Тогда*

$$\int_0^{2\pi} \log \rho_{1/2} \left(e^{it}; \{a_n\} \right) dt > -\infty , \tag{2}$$

где $\rho_{\frac{1}{2}} \left(\xi; \{a_n\} \right) = \inf_n \frac{|\xi - a_n|}{\left(1-|a_n|\right)^{1/2}}, \left(|\xi| = 1 \right)$.

Множество $A \subset \mathbb{D}$ называется множеством Бляшке для класса D_0^2, если любая последовательность Бляшке из A является множеством нулей для D_0^2.

В 1996г. К. Богдан доказал следующие утверждения (см. [5]).

Теорема. *Множество $A, A \subset \mathbb{D}$ является множеством Бляшке для класса D_0^2 тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{logdist}\left(e^{it}; A\right) dt > -\infty . \qquad (3)$$

Если имеет место (3), то существует внешняя функция $F, F \in D_0^2$ такая, что $B \cdot F \in D_0^2$ для любого произведения Бляшке с нулями из множества A.

Теорема. *Пусть $\{\theta_n\}$ - последовательность равномерно распределенных значений на $(0, 2\pi]$, $r_n \in (0,1)$ и $a_n = r_n e^{i\theta_n}, n = 1, 2, \ldots$ Тогда, если выполняется условие (1), то $\{a_n\}$ является последовательностью нулей для D_0^2. Если (1) не выполняется, $\{a_n\}$ не является множеством нулей для D_0^2.*

Отметим, что в [5] К. Богдан построил функцию $f \in D_0^2$ с множеством нулей $\{a_n\}$ такую, что для любого значения $t \in (0, 2\pi]$

$$dist\left(e^{it}; \{a_n\}\right) = 0 .$$

В этой заметке получены следующие результаты.

Лемма 1. *Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ $\left(|a_1| \le |a_2| \le \ldots \le |a_n| \le \ldots\right)$ является последовательностью Бляшке, $E \subset T$ - такое множество, что:*

а) $dist\left(e^{i\theta}; \{a_n\}\right) = 0$ для любой точки $e^{i\theta} \in E$;

б) для любой последовательности $\{a_{n_k}\}$ последовательности $\{a_n\}$ такой, что $\left|\theta - \arg a_{n_k}\right| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, где θ такое, что $e^{i\theta} \in E$, имеет место оценка

$$\left|\theta - \arg a_{n_k}\right| = o\left(\sqrt{1 - \left|a_{n_k}\right|}\right), k \to \infty ;$$

в) для любой точки $e^{i\theta} \in T \setminus E$ $dist\left(e^{i\theta}; \{a_n\}\right) \ne 0$.

Тогда для любого значения $\theta, \theta \in [0, 2\pi]$

$$\rho_{1/2}\left(e^{i\theta}; \{a_n\}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - |a_n|\right)^{3/2} \le dist\left(e^{i\theta}; \{a_n\}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - |a_n|\right).$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда множество* $A \subset \mathbb{D}$ *является множеством Бляшке тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^{2\pi} \log \rho_{1/2}\left(e^{i\theta}; A\right) d\theta > -\infty .$$

Теорема 2. *Существует последовательность* $\{a_n\}$ *- Бляшке, не являющаяся множеством нулей класса* D_0^2 *такая, что*

$$\int_0^{2\pi} \log \rho_{1/2}\left(e^{i\theta}; \{a_n\}\right) d\theta > -\infty .$$

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ *является множеством нулей класса* D_0^2 *и пусть*

$$E = \left\{\xi; \xi \in T, dist\left(\xi; \{a_n\}\right) = 0\right\} .$$

Тогда, если мера множества E положительна и $\xi = e^{i\theta} \in E$, то

$$\left|\theta - \arg a_n\right| \geq c\sqrt{1 - \left|a_n\right|},\ n = 1, 2, \ldots$$

где c – некоторая положительная постоянная.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 18T-1A019.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Karleson L.** On the zeros of functions with bounded Dirichlet integral //Math. Z. -1952.-52.-P.289-295.
2. **Shapiro H., Shilds A.** On the zeros of functions with finite Dirichket integral and some related functions spaces //Math. Z. -1962.-80. -P. 217-229.
3. **Захарян В.С.** Граничные свойства и единственность функций с ограниченным интегралом типа Дирихле //Изв. АН АрмССР. Математика V.-1970.- N6.- C.534-543.
4. **Вагаршакян А.А.** О нулях аналитических функций некоторых классов //Изв. АН АрмССР.-1978.- XIII, N5-6.- C.423-427.
5. **Bogdan K.** On the zeros of functions with finite Dirichlet integral //Kadai Math. j.-1996.-19.-P.7-16.

Ռ.Վ. ԴԱԼԼԱՔՅԱՆ

ՄԻԱՎՈՐ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՎ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՈՒՆԵՑՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԶՐՈՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ներկայացված են մի քանի դիտողություններ միավոր շրջանում անալիտիկ և Դիրիխլեի վերջավոր ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների դասի զրոների մասին:

Առանցքային բառեր. D_0^2 և H^p դասեր, Բլյաշկեի պայմանը, Բլյաշկեի բազմությունը, D դասի ֆունկցիաների միակության բազմությունը:

R.V. DALLAKYAN

ZEROS OF ANALYTIC FUNCTIONS IN A UNIT CIRCLE WITH THE FINITE DIRICHLET INTEGRAL

Some remarks on zeros of analytic functions in a unit circle with a finite Dirichlet integral are introduced.

Keywords: classes D_0^2 and H^p, conditions of Blaschke, set of Blaschke, set of uniqueness of functions of class D.

УДК 517.946

С.О. АБЕЛЯН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ, КОГДА МНИМАЯ ЕДИНИЦА ЯВЛЯЕТСЯ ДВУКРАТНЫМ КОРНЕМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для неправильно эллиптического уравнения шестого порядка. При некотором расположении корней характеристического уравнения получена новая формула для определения дефектных чисел. Рассматривается случай, когда i - двойной корень характеристического уравнения. Условия разрешимости и решения однородной задачи определяются в явном виде.

Ключевые слова: задача Дирихле, дефектные числа, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, неправильно эллиптическое уравнение.

Пусть $D = \{z = x + iy : |z| = r < 1\}$, а $\Gamma = \partial D$. В области D рассмотрим неправильно эллиптическое уравнение шестого порядка. Предполагаем, что i - двукратный корень характеристического уравнения