Ռ.Վ. ԴԱԼԼԱՔՅԱՆ

ՄԻԱՎՈՐ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՎ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՈՒՆԵՑՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԶՐՈՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ներկայացված են մի քանի դիտողություններ միավոր շրջանում անալիտիկ և Դիրիխլեի վերջավոր ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների դասի զրոների մասին:

Առանցքային բառեր. D_0^2 և H^p դասեր, Բլյաշկեի պայմանը, Բլյաշկեի բազմությունը, D դասի ֆունկցիաների միակության բազմությունը:

R.V. DALLAKYAN

ZEROS OF ANALYTIC FUNCTIONS IN A UNIT CIRCLE WITH THE FINITE DIRICHLET INTEGRAL

Some remarks on zeros of analytic functions in a unit circle with a finite Dirichlet integral are introduced.

Keywords: classes D_0^2 and H^p, conditions of Blaschke, set of Blaschke, set of uniqueness of functions of class D.

УДК 517.946

С.О. АБЕЛЯН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ, КОГДА МНИМАЯ ЕДИНИЦА ЯВЛЯЕТСЯ ДВУКРАТНЫМ КОРНЕМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для неправильно эллиптического уравнения шестого порядка. При некотором расположении корней характеристического уравнения получена новая формула для определения дефектных чисел. Рассматривается случай, когда i - двойной корень характеристического уравнения. Условия разрешимости и решения однородной задачи определяются в явном виде.

Ключевые слова: задача Дирихле, дефектные числа, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, неправильно эллиптическое уравнение.

Пусть $D = \{z = x + iy : |z| = r < 1\}$, а $\Gamma = \partial D$. В области D рассмотрим неправильно эллиптическое уравнение шестого порядка. Предполагаем, что i - двукратный корень характеристического уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2}\prod_{k=j}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu_j\frac{\partial}{\partial z}\right)u=0. \qquad (1)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ – операторы комплексного дифференцирования; μ_j – постоянные числа такие, что $\mu_j \neq 0,\quad |\mu_j|<1,\quad j=1,2,3,4.$ В работе рассмотрены следующие три случая:

$1)\mu_1=\mu_2=\mu_3\neq\mu_4;\ 2)\mu_1=\mu_2\neq\mu_3\ \ j=3,4,\ \ \mu_3\neq\mu_4;$

$3)\mu_j\quad \overline{j=1,4}$ - простые корни.

Искомое решение u шесть раз непрерывно дифференцируемо в D и вместе с производными до второго порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е. $u\in C^{(2,\alpha)}\left(\overline{D}\right)$. Для уравнения (1) рассматриваем задачу Дирихле в классической постановке. На границе $\Gamma=\partial D$ неизвестная функция u удовлетворяет условиям Дирихле:

$$u\Big|_{\Gamma}=f_0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma}=f_1,\qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_{\Gamma}=f_2. \qquad (2)$$

Здесь заданные функции $f_j\in C^{(2-j,\alpha)}\left(\Gamma\right)$ принадлежат функциональному классу, который уточним позднее. В [1] было доказано, что условия (2) эквивалентны условиям

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^k\partial \overline{z}^{2-k}}\right|_{\Gamma}=F_k\left(\theta\right),\ \ z=e^{i\theta},\qquad k=0,1,2\ ,\\ u(1,0)=f_0(1,0),\quad u_r=f_1(1,0),\ \ u_\theta=f_{0\theta}(1,0)\ ,\end{gathered} \qquad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial\theta}$ – производная по аргументу комплексного числа ($z=re^{i\theta}$). Если все $f_j\,(j=0,1,2)$ функции принадлежат классу $C^{(2-j,\alpha)}\left(\Gamma\right)$, то $F_k\in C^{(\alpha)}$. $F_k\in C^{(\alpha)}\left(\Gamma\right)-$ заданные функции, однозначно определяемые по функциям $f_0,\,f_1,\,f_2$.

Как известно, задача (1),(3), как и любая классическая задача для неправильно эллиптического уравнения, не является корректной [2] В [3] Н.Е. Товмасян для неправильно эллиптического уравнения 2-го порядка показал, как определить класс граничных функций, чтобы задача Дирихле стала нормально разрешимой. Целью работы является определение функционального класса граничных функций, обеспечивающего нормальную разрешимость задачи (1), (3), а также определение дефектных чисел этой задачи, т.е. количество линейно независимых решений однородной задачи Дирихле и количество линейно независимых условий на граничные функции, необходимых и достаточных для разрешимости неоднородной задачи Дирихле. Случай двукратных корней для уравнения типа (1) четвертого порядка был рассмотрен в [4]. Случай уравнения шестого порядка при других расположениях корней характеристического уравнения был рассмотрен в [5].

Определение. Пусть $0<r<1-$ заданное число. Класс $A^{(2,\alpha)}(r)$ состоит из функции аналитических в кольце $r<|z|<1$ и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α с производными до второго порядка включительно вплоть до границы $\left(f^{(j)}\in C^{\alpha}\left(r\le|z|\le 1\right)\quad j=0,1,2\right)$.

Доказываются следующие теоремы. Первый случай.

Теорема 1. Предположим, что $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\neq\lambda_4$. Если граничные функции $F_j\in A^{(2,\alpha)}(|\mu_1|)$ и $\sigma=\mu_4\mu_1^{-1}$, тогда при условии

$$S_{l-3}(\sigma)=\sum_{m=0}^{l-3}(m+1)(m+2)\sigma^m\neq 0\quad l=4,5,... \tag{4}$$

задача (1),(3) однозначно разрешима. Если при некотором q условие (4) нарушается, то однородная задача (1),(3) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $q+2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Условие (4) может нарушиться при одном значении l. Таким образом, дефектные числа задачи (1),(3) могут быть равны нулю или единице.

Теперь рассмотрим второй случай.

Теорема 2. Предположим, что $\mu_1=\mu_2\neq\mu_j, j=3,4$ и $\mu_3\neq\mu_4$. Обозначим $\sigma=\mu_1\mu_3^{-1}$, $\tau=\mu_1\mu_4^{-1}$. Если граничные функции $F_j\in A^{(2,\alpha)}(|\mu|)$, $(\mu=\min|\mu_j|, j=1,3,4)$, тогда при условии

$$\Omega_l(\sigma,\tau)=\sum_{j=1}^{l-2}(l-j-1)\sum_{m=0}^{j-1}\sigma^m\tau^{j-1-m}\neq 0 \quad l=4,5,... \tag{5}$$

задача (1),(3) однозначно разрешима. Если при некотором n условие (5) нарушается, то однородная задача (1),(3) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $n+2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (1),(3) равны количеству номеров n, при которых нарушается условие (5).

Третий случай. Предположим, что в (5) имеем $|\mu_4|\leq|\mu_3|\leq|\mu_2|\leq|\mu_1|<1,\ \mu_k\neq\mu_j$.

Теорема 3. Обозначим $\sigma=\mu_1^{-1}\mu_2,\ \tau=\mu_1^{-1}\mu_3,\ \rho=\mu_1^{-1}\mu_4$. Если граничные функции $F_j\in A^{(2,\alpha)}(|\mu_1|)$, тогда при условии

$$T_l(\sigma,\tau,\rho)\equiv\mu_1^{3l+s}\sigma^2\tau^2\rho^2\begin{pmatrix}1 & \sigma^l & \tau^l & \rho^l\\ 1 & \sigma^{l-1} & \tau^{l-1} & \rho^{l-1}\\ 1 & \sigma^{l-2} & \tau^{l-2} & \rho^{l-2}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\neq 0,\quad l=4,5,... \tag{6}$$

задача (1),(3) однозначно разрешима. Если при некотором p условие (6) нарушается, т.е. $T_l(\sigma,\tau,\rho)=0$, то однородная задача (1),(3) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $p+2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (1),(3) равны количеству номеров p, при которых нарушается условие (6).

Поскольку доказательства этих трех теорем аналогичны, докажем третью теорему.

Доказательство. В [1] было показано, что общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$u=\Phi_0(z)+(1-z\bar{z})\Phi_1(z)+c\bar{z}+\sum_{k=1}^{4}\Psi_k(z+\mu_k\bar{z}), \tag{7}$$

где Φ_i $(i=0,1)$ и Ψ_j $(j=1,2,3,4)$ - аналитические функции в областях $D(\mu)=\{z+\mu\bar{z}\,|\,z\in D\}$ соответственно, которые необходимо определить.

Подставим функцию (7) в граничные равенства (3). Используя операторное тождество [1]

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \overline{z}^m}\frac{\partial^l}{\partial \theta^l} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(k-m\right)iI\right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \overline{z}^m},$$

при $k = 0,1,2$ получим

$$\begin{gathered}\Phi_0''\left(z\right) - \overline{z}\Phi_1'(z) + \sum_{k=1}^{4}\Psi_k''(z+\mu_k\overline{z}) = F_0(z), \\ -(z\Phi_1(z))' + \sum_{k=1}^{4}\Psi_k''(z+\mu_k\overline{z})\mu_k = F_1(z), \quad \sum_{k=1}^{4}\Psi_k''(z+\mu_k\overline{z})\mu_k^2 = F_2(z)\end{gathered} . \quad (8)$$

Представим Φ_i'' и Ψ_j'' на окружности Γ, используя разложение, полученное в [3]:

$$\Phi_j''(\mathrm{z}+\mu\overline{\mathrm{z}}) = \varphi_j\left(z\right) + \varphi_j\left(\mu\overline{z}\right)\sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}z^k + \sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}\mu^k z^{-k},$$

$$\Psi_j''\left(\overline{z}+\nu_j z\right) = \psi_j\left(\overline{z}\right) + \psi_j\left(\nu_j z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}\nu_j^k z^k \;, \; j = 1,2,3. \quad (9)$$

Так как подлежащие определению функции φ_j и ψ_j аналитичны в круге D, то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{jk} и B_{jk}. Разложим функции F_k $(k = 0,1,2)$ на окружности Γ в ряд Фурье:

$$F_j\left(z\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{kj}z^k, \qquad j = 0,1,2. \quad (10)$$

Для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk} подставим (9) и (10) в граничные условия (8). При $k = 0,1,2$ получим

$$\sum_{l=0}^{\infty}B_{0l}z^k - B_{10}\overline{z} + \sum_{l=0}^{\infty}B_{1l+1}z^l + \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{4}\left(A_{kl}\right)z^l + \left(\sum_{k=1}^{4}A_{kl}\mu_k^l\right)z^{-l}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l0}z^l,$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)B_{1l}z^l + \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{4}\left(A_{kl}\mu^k\right)z^l + \left(\sum_{k=1}^{4}A_{kl}\mu_k^{l+1}\right)z^{-l}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l1}z^l,$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{4}\left(A_{kl}\mu_k^2\right)z^l + \left(\sum_{k=1}^{4}A_{kl}\mu_k^{l+2}\right)z^{-l}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l2}z^l.$$

Пусть $l \ge 2$. Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z^l и z^{-l}, получим систему

$$\sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{l+2} = d_{-l2}\ ,\ \sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{l+1} = d_{-l1}\ ,\ \sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{l} = d_{-l0}\ ,$$
$$\sum_{k=1}^{4} A_{kl}\mu_k^{2} = d_{l2} \tag{11}$$

Определитель основной матрицы этой системы имеет следующий вид:

$$\Delta_l \equiv \begin{vmatrix} \mu_1^{l+2} & \mu_2^{l+2} & \mu_3^{l+2} & \mu_4^{l+2} \\ \mu_1^{l+1} & \mu_2^{l+1} & \mu_3^{l+1} & \mu_4^{l+1} \\ \mu_1^{l} & \mu_2^{l} & \mu_3^{l} & \mu_4^{l} \\ \mu_1^{2} & \mu_2^{2} & \mu_3^{2} & \mu_4^{2} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Из каждой строки детерминанта (12) вынесем различные степени μ_1 так, чтобы все элементы первого столбца были равны единице. Умножив последние три столбца на μ_1^{l+2}, получим

$$T_l(\sigma,\tau,\rho) \equiv \mu_1^{3l+s}\sigma^2\tau^2\rho^2 \begin{vmatrix} 1 & \sigma^l & \tau^l & \rho^l \\ 1 & \sigma^{l-1} & \tau^{l-1} & \rho^{l-1} \\ 1 & \sigma^{l-2} & \tau^{l-2} & \rho^{l-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{13}$$

Пусть $|\sigma| < |\tau| \le |\rho|$, тогда при $l \to \infty$ получим

$$\Delta_l = \mu_1^{3l+s}\sigma^2\tau^2\rho^2\tau^{l-2}\rho^{l-2} \begin{vmatrix} 1 & \tau^2 & \rho^2 \\ 1 & \tau & \rho \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \mu_1^{3l+s}\sigma^2\tau^2\rho^2\tau^{l-2}\rho^{l-2}(\tau-1)(\rho-1)(\rho-\tau) \ne 0.$$

Рассмотрим однородную задачу (1), (3). Решение этой задачи строится с использованием коэффициентов A_{kl} для $l \ge 2$, которые определяются из однородных систем (11). Поэтому получаем, что $A_{kl} = 0$ при $l > 3$. Коэффициенты A_{k3} также равны нулю, так как Δ_3 - обобщенный детерминант Вандермонда с различными членами и, следовательно, не равен нулю. Таким образом, ненулевое решение однородной задачи (1), (3) может быть многочленом порядка не более четырех. Но произвольный ненулевой многочлен, удовлетворяющий однородным условиям (3) на Г, делится на $(1-z\overline{z})^3$ ([6], Теорема 5.1). Это означает, что однородная задача (1), (3) имеет только тривиальное решение.

Перейдём к неоднородной задаче (1), (3). Рассмотрим неоднородную систему (10). Учитывая, что $\Delta_l \neq 0$ для $l \geq 3$, мы видим, что в этом случае коэффициенты A_{kl} определяются однозначно. В системе (11) для $l=2$ левые части третьего и четвертого уравнений одинаковы, а правые части одинаковы, так как из соотношений (6) следует равенство $a_{20}=-a_{22}$, поэтому коэффициенты A_{k2} можно вычислить (неоднозначно). Принимая во внимание равенство $a_{10}=-a_{11}$, можно показать, что коэффициенты A_{k1} и A_{k0} также могут быть определены неоднозначно. После определения функций Ψ_k мы найдем функции Φ_k из уравнений (9). Подводя итоги, можно сказать, что неоднородная задача (1), (3) имеет решение.

Теперь покажем, что это решение принадлежит классу $C^{(2,\alpha)}(D\cup\Gamma)$, если граничные функции из класса $A^{(2,\alpha)}(|\mu_1|)$. Решая полученную систему (10), получаем следующие асимптотические оценки для решения:

$$
\begin{aligned}
&A_{1l} \approx d_{-l0}\left(\mu_1^{-l}-\mu_2^{-l}\right)-d_{-l1}\mu_2^{-l}-(\tau-1)\left(d_{-lk}\mu_3^{-l}-d_{-lk}\mu_4^{-l}\right)-\\
&-(\rho-1)d_{-lk}\mu_4^{-l}-d_{-lk}\mu_3^{-l}-2d_{-lk}\mu_4^{-l},\\
&A_{2l} \approx d_{-l1}\mu_2^{-l}-d_{-l0}\mu_2^{-l}-(\tau-1)\left(d_{-lk}\mu_3^{-l}-d_{-lk}\mu_4^{-l}\right)-(\rho-1)d_{-lk}\mu_4^{-l},\\
&A_{3l} \approx d_{-lk}\mu_3^{-l}-d_{-lk}\mu_4^{-l}, \quad k=0,1,2\\
&A_{4l} \approx d_{-lk}\mu_4^{-l}, \quad k=0,1,2.
\end{aligned}
$$

Эти оценки показывают, что если F_j принадлежат классу $A^{(2,\alpha)}(|\mu_4|)$, то функции Φ_j и Ψ_j принадлежат классу $C^{(2,\alpha)}(\overline{D})$, и, следовательно, решение и также из этого класса. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабаян А.О**. О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге// Известия НАН Армении. Математика.-2003.- 38, №6.- С.39-48.
2. **Бицадзе А.В.** Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.- М.: Наука, 1966.- 203р.
3. **Товмасян Н.Е.** Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия НАН Арм ССР. Сер. Математика.-1968.- 3, № 6. -С.497-521.
4. **Бабаян А.О**. Задача Дирихле для уравнения в частных производных четвертого порядка в случае двукратных корней характеристического уравнения// Mathematica Montisnigri.-2015.- V.3.2.- P.66-80.
5. **Бабаян А.О**., **Абелян С.О**. О задаче Дирихле для одного правильно эллиптического уравнения шестого порядка в единичном круге// Вестник НПУА: Сб.научных статей..-2017.-Том1.- С.14-18.
6. **Axler S., Bourdon., Ramey W.** Harmonic Function Theory.-Springer-Verlag.Inc, New-York, 2001.- 260p.

Ս.Հ. ԱԲԵԼՅԱՆ

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ, ԵՐԲ ԿԵՂԾ ՄԻԱՎՈՐԸ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԿՐԿՆԱՊԱՏԻԿ ԱՐՄԱՏՆ Է

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը միավոր շրջանում վեցերորդ կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարման դեպքում: Բնութագրիչ հավասարման մի քանի արմատների դասավորվածությունից ստացվել է նոր բանաձև՝ դեֆեկտային թվերը որոշելու համար: Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ i-ն բնութագրիչ հավասարման կրկնապատիկ արմատն է: Համասեռ խնդրի լուծումը և լուծելիության պայմանները որոշվում են արդյունավետ:

Առանցքային բառեր. Դիրիխլեի խնդիրը, դեֆեկտային թվեր, Դիրիխլեի համասեռ խնդրի ոչ տրիվիալ լուծումները, ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարում:

S.H. ABELYAN

DIRICHLET PROBLEM WHEN THE IMAGINARY UNIT IS THE DOUBLE ROOT OF A CHARACTERISTIC EQUATION

The Dirichlet problem in a unit disc for a sixth order improperly elliptic equation is considered. At a certain arrangement of the roots of the characteristic equation, a new formula is obtained for determining the defective numbers. The case when is the double root of the characteristic equation is considered. The conditions for the solvability and solution of the homogeneous problem are determined in an explicit form.

Keywords: Dirichlet problem, defective numbers, nontrivial solutions of homogeneous Dirichlet problem, an improperly elliptic equation.