УДК 515.172.22

П.А. МАТЕВОСЯН

ОЦЕНКА ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $H^p(\alpha)$

(*Гюмри*)

Исследуются некоторые свойства в весовом пространстве $H^p(\alpha)$ голоморфных в единичном круге функций. Получена окончательная оценка для тейлоровских коэффициентов.

Ключевые слова: весовые пространства, оценка коэффициентов, единичный круг, голоморфные функции.

Пусть D – единичный круг на комплексной плоскости. Классом Харди H^p $(0 < p < +\infty)$ называют множество всех функций $f(z)$, аналитических в единичном круге D, и таких, что

$$sup\left\{\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta : 0 < r < 1\right\} < +\infty. \quad (1)$$

Символ H^∞ обозначает множество всех функций, аналитических и ограниченных в D. Коэффициенты тейлоровских разложений функций класса H^p изучены разными авторами [1-6]. Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу H^p $(0 < p < 1)$, то

$$|a_n| < [H^P(f)]^{\frac{1}{p}}(n+1)^{\frac{1}{p}-1} \ (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

или $|a_n| = 0\left(n^{\frac{1}{P}-1}\right)$, где

$$H^p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta. \quad (3)$$

Целью настоящей статьи является получение оценок для тейлоровских коэффициентов функций класса $H^p(\alpha)$ $(0 < p < 1, \alpha > -1)$, то есть функций $f(z)$, голоморфных в единичном круге D, для которых интеграл

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^\alpha \left|f(re^{i\theta})\right|^p r\, dr\, d\theta$$

существует.

Очевидно, что при $\alpha_1 < \alpha_2$ класс $H^p(\alpha_1)$ содержится в классе $H^p(\alpha_2)$, а при $p_1 < p_2$ класс $H^{p_2}(\alpha)$ содержится в классе $H^{p_1}(\alpha)$.

В данной работе устанавливаются оценки для коэффициентов тейлоровских разложений для функций класса $H^p(\alpha)$ $(0 < p < 1, \alpha > -1)$ в зависимости от α *и* p и доказывается, что полученная оценка окончательна.

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p.$$

Тогда

$$f_r(z)=f(rz)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n z^n \in H^p(\alpha).$$

Ввиду условия (2) можем написать

$$|a_n|r^n \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} (n+1)^{\frac{1}{p}-1}.$$

Следовательно, имеем

$$\frac{|a_n|^p}{(n+1)^{1-p}}\, r^{np} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta.$$

Если обе части последнего неравенства умножим на $(1-r^2)^{\alpha} r$ и проинтегрируем по r *в* $[0;1]$, то получим

$$\frac{|a_n|^p}{(n+1)^{1-p}}\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha} r^{np+1} dr \leq \frac{\alpha+1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p (1-r^2)^{\alpha}\, r\, dr\, d\theta\,.$$

Так как

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p (1-r^2)^{\alpha}\, r\, dr\, d\theta\ = H_{\alpha}^p(f),$$

то

$$\frac{|a_n|^p}{(n+1)^{1-p}}\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha}\ r^{np+1} dr \leq \frac{1}{2} H_{\alpha}^p(f).$$

Заметим, что

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha}\ r^{np+1} dr = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(np+1)}{\Gamma(\alpha+2+np)}\,.$$

Применяя формулу Стирлинга, имеем

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha}\ r^{np+1}dr = \frac{(np+1)^{np+\frac{1}{2}}\,\Gamma(\alpha+1)}{(np+\alpha+2)^{np+\alpha+\frac{3}{2}}\,e^{-\alpha-1}}.$$

Отсюда, имея в виду, что

$$(np+1)^{np+\frac{1}{2}} = (np)^{np+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{np}\right)^{np}\left(1+\frac{1}{np}\right)^{\frac{1}{2}} \sim e(np)^{np+\frac{1}{2}},$$

$$(np+\alpha+2)^{np+\alpha+\frac{3}{2}} \sim 30\ e^2(np+\alpha)^{np+\alpha+\frac{3}{2}} \sim e^{\alpha+2(nP)^{nP+\alpha+\frac{3}{2}}},$$

таким образом, получим

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha}\ r^{np+1}dr = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(np)^{\alpha+1}},$$

поэтому

$$\frac{|a_n|^p}{(n+1)^{1-p}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(np)^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{2}H_{\alpha}^{p}(f)$$

или

$$|a_n| \leq c(\alpha)(n+1)^{\frac{\alpha+2}{p}-1}, \qquad (4)$$

где $c(\alpha) = \left[\frac{p^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}H_{\alpha}^{p}(f)\right]^{\frac{1}{p}}$.

Теперь покажем, что если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу $H^p(\alpha)$ $(0 < p < 1, \alpha > -1)$, то полученная оценка (4) для тейлоровских коэффициентов функции $f(z)$ окончательна, т.е. ее улучшить невозможно. Для этого докажем следующую теорему:

Теорема. Какова бы ни была функция $\varphi(n) > 0$, монотонно стремящаяся к нулю, существует функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ такая, что:

а) $f(z) = H^p(\alpha)$ $(0 < p < 1)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{(n+1)^{\frac{\alpha+2}{P}-1}\varphi(n)} = \infty.$

Доказательство теоремы приведем в дальнейшем.

Пусть $f(z) \in H^p(\alpha)$ $(\alpha > -1, p \geq 1)$. Тогда для оценивания $M_f = = max|f(z)|$ роста функций получается следующая формула:

$$|f(z)| \leq C[H^p(f)]^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(1-|z|)^{\frac{\alpha+2}{p}}},$$

где

$$C = \left[2^{\alpha+1} \frac{(\alpha+1)(p-1)}{\pi(\alpha+2)} \left(1 - \frac{(p-1)\pi^{\frac{(\alpha+2)p}{p-1}}}{(\alpha+1)^{p+1}}\right)\big(1+o(1)\big)\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

доказательство которой приведем в дальнейшем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Привалов И.И**. Граничные свойства аналитических функций/ ГТТИ.- М., Л., 1950.
2. **Степанян С.С**. О наилучшей оценке тейлоровских коэффициентов функций класса М.М. Джрбашяна// ДАН АрмССР.- 1982.- Том. 35, № 3.- С.107-113.
3. **Оганесян И.В**. Некоторые дополнительные свойства функций класса М.М. Джрбашяна. –Деп. В Арм. НИИНТИ. 4.9 (1989), № 49-Ар.
4. **Джрбашян М.М.** О кононическом представлении мероморфных в единичном круге функций // Докл. АН АрмССР.-1945-Т.3, №1.-С.3-9.
5. **Джрбашян М.М.** К проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР.-1948.-Вып.2.– С.3-55
6. **Шамоян Ф.А.** Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеристики нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного порядка // Изв. АН АрмССР. Сер.матем.-1978.-13, №№ 5-6.-С.405-422.

Պ.Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ԹԵՅԼՈՐՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ $H^p(\alpha)$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Դիտարկվում են հոլոմորֆ ֆունկցիաների $H^p(\alpha)$ կշռային տարածությունների որոշ հատկություններ: Ստացվել է թեյլորյան գործակիցների վերջնական գնահատականը:

Առանցքային բառեր. կշռային տարածություն, գործակիցների գնահատական, միավոր շրջան. հոլոմորֆ ֆունկցիա:

P.A. MATEVOSYAN

ESTIMATING THE TAYLOR COEFFICIENTS IN THE $H^p(\alpha)$ SPACE

Some qualities of holomorphic functions in the $H^p(\alpha)$ weighted space are studied. The final estimate of Taylor coefficients is obtained.

Keywords: weighted space, estimate of coefficients, holomorphic function, unit disc.