УДК 519.21 (072)

Р.Ш. НАГАПЕТЯН

ОДНО ПРЕДЕЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ В СИСТЕМЕ M/G/1
(*Капан*)

В системе массового обслуживания M/G/1 с помощью предельной теоремы для полурегенерирующих процессов найдено предельное соотношение для совместного распределения некоторых важных случайных процессов, характеризующих функционирование системы в режиме FIFO (first-in-first-out).

Ключевые слова: пуассоновское распределение, полурегенерирующий процесс, цепь Маркова, длина очереди, стационарное распределение.

Рассмотрим систему массового обслуживания M/G/1 с неограниченным числом мест ожидания. Заявка, заставшая в момент своего поступления систему свободной, сразу начинает обслуживаться. После окончания обслуживания этой заявки прибор приступает к обслуживанию всех накопившихся к этому времени заявок. И вообще, в момент окончания обслуживания пакета (группы) заявок к обслуживанию принимаются все накопившиеся к этому времени заявки. Заявки одного пакета обслуживаются в порядке поступления заявок (FIFO).

Введем обозначения характеристик, определяющих работу системы: λ –интенсивность входящего пуассоновского потока; B – функция распределения длительности обслуживания одной заявки.

Кроме того, пусть $\nu(t)$ – длина очереди в момент t;

$\upsilon(x,t)$ - виртуальное время пребывания в системе заявки с временем обслуживания, равным x;

$\zeta(t)$ – размер пакета, обслуживаемого в момент t, или, если система в момент t свободна, размер последнего пакета, обслуженного до момента t.

Введем в рассмотрение вложенную цепь Маркова $\zeta_n = \zeta(t_n)$, где t_n – момент начала обслуживания *n*-го пакета (ζ_n - размер *n*-го пакета).

Стандартными методами доказывается, что при $\rho = \lambda\beta_1 < 1$ существуют пределы $[1]$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n = k\} = \pi_k, \ \ k \ge 1,$$

являющиеся решением системы

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}, \ \sum_i \pi_i = 1$$

и определяемые функциональным уравнением

$$\pi(z) = \pi(\beta(\lambda - \lambda z)) - (1 - z)\pi(\beta(\lambda)), \ \ \pi(1) = 1.$$

Здесь

$$\pi(z) = \sum_{k \ge 1} \pi_k z^k, \ |z| \le 1, \beta_1 = \int_0^\infty x dB(x),$$

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x),$$

$$p_{ij} = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} dB^{*i}(x) & при \ j > 1, \\ \int\limits_0^\infty \left(\frac{\lambda x}{1!} e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} \right) dB^{*i}(x) & при \ j = 1, \end{cases}$$

где * означает операцию свертки.

Двумерный процесс $\xi(t) = \{\nu(t), \upsilon(x,t)\}$ является регенерирующим с зависимыми циклами регенерации марковского типа (полурегенерирующим).

Цель работы - найти предел

$$\lim_{t \to \infty} P\{\nu(t) = j, \upsilon(x,t) < s, \ \zeta(t) = k / \zeta_0 = i_0\}.$$

Согласно предельной теореме для таких процессов $[2],[3]$, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \to \infty} P\{\xi(t) \in B, \zeta(t) = k / \zeta_0 = i_0\} = a_k \int_0^\infty \mu_k(t, B) dt \ ,$$

где B – борелевское множество; $\zeta(t)$ - “вложенный” полумарковский процесс (в нашем случае - $B = \{j\} x(-\infty, s)$, $\zeta(t)$ – размер пакета, обслуживаемого в момент t); $a_k = \frac{\pi_k}{\sum_{i \ge 1} \pi_i w_i}$, величина w_i есть среднее время пребывания в состоянии i до перехода в следующее состояние, т.е.

$$w_i = i\beta_1 + \frac{1}{\lambda}\beta^i(\lambda),$$

$$\mu_k(t) = \mu_k(t, B) = P\{\nu(t) = j, \upsilon(x,t) < s,\ z_1 > t / \zeta_0 = k\},\ k \ge 1,$$

$$z_n = t_n - t_{n-1},\ t_0 = 0,\ n = 1,2,...$$

Найдем $\mu_k(t)$ - заданную вероятностную характеристику дополнительной траектории $\xi(t) = \{\nu(t), \upsilon(x,t)\}$.

Назовем P -пакетом последний пакет, обслуживаемый до начала обслуживания виртуальной заявки. Будем вести отсчет времени t с момента начала обслуживания P -пакета.

Пусть η - момент окончания обслуживания P -пакета, ξ -момент поступления первой заявки в [0,∞], т.е. имеет место экспоненциальное распределение, $1 - e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$;

X_K - время, требуемое для обслуживания K-й поступившей заявки;

u - задержка в обслуживании виртуальной x-заявки за счет обслуживания заявок в одном с ней пакете (по определению, x-заявка есть заявка со временем обслуживания, равным x≥0).

Тогда виртуальное время пребывания в системе x -заявки:

$\upsilon(x,t) = x \cdot I_{\{\eta<t<\xi\}} + I_{\{t\le\eta\}} \cdot (\eta - t + x + u)$, где I_A есть индикатор события A.

Ясно, что в режиме FIFO задержка имеет следующий вид:

$u = \sum_{k=1}^{\nu(t)} x_k$ – суммарное время, необходимое для обслуживания заявок, поступивших до момента t.

Тем самым получаем, что

$$\mu_k(t) = P\{\nu(t) = j, \upsilon(x,t) < s,\ z_1 > t / \zeta_0 = k\} =$$
$$= \begin{cases} P\{\nu(t) = j, \eta - t + x + u < s, \eta > t / \zeta_0 = k\} & при\ j > 0, \\ I_{\{x<s\}} \cdot P\{\nu(t) = 0,\ \eta < t < \xi / \zeta_0 = k\} & при\ j = 0. \end{cases}$$

Отсюда вытекает формула

$$\mu_k(t) = \begin{cases} I_{(x<s)} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{j!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{s-x} \left[B^{*k}(t + s - x - u) - B^{*k}(t)\right] dB^{*j}(u) & при\ \ j > 0, \\ I_{(x<s)} \cdot e^{-\lambda t} \cdot B^{*k}(t) & при\ \ j = 0: \end{cases}$$

Таким образом, в правой части предельного соотношения

$$\lim_{t\to\infty} P\{\nu(t) = j, \upsilon(x,t) < s,\ \zeta(t) = k / \zeta_0 = i_0\} = a_k \int_0^\infty \mu_k(t)dt$$

все известно.

Для применимости указанной предельной теоремы остается заметить, что циклы регенерации содержат абсолютно непрерывную компоненту, так как свободный период имеет экспоненциальное распределение, $1 - e^{-\lambda x},\ x \ge 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Климов. Г.П.** Стохастические системы обслуживания. –М.: Наука, 1966. -243с.
2. **Сильвестров Д.С.** Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. –М.: Советское радио, 1980.-272с.
3. **Pyke R., Schaufele R**. Limit theorems for Markov renewal processes// Ann. Math. Stat. – 1964. - Vol. 35, N 4.- P. 1746-1764.

Ռ.Շ. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

ՄԵԿ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆ M/G/1 ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ

Դիտարկվում է զանգվածային սպասարկման M/G/1 համակարգը (մեկ սպասարկող սարք,պահանջների պուասոնյան հոսք, պահանջների սպասարկումը կամայական բաշխումով, սպասման անվերջ թվով տեղեր, պահանջների խմբային սպասարկում FIFO սկզբունքով)։ Այսպիսի համակարգը չի ենթարկվում մարկովյան նկարագրության, սակայն նկարագրվում է կիսավերականգնման պրոցեսով։ Այդ պրոցեսների վերաբերյալ սահմանային թեորեմի միջոցով ստացված է համակարգի գործունեությունը բնութագրող մի քանի կարևոր պրոցեսների համատեղ բաշխումը կայունացված ռեժիմում։

Առանցքային բառեր. պուասոնյան բաշխում, կիսավերականգնման պրոցես, Մարկովի շղթա, հերթի երկարություն, ստացիոնար բաշխում։

R.SH. NAHAPETYAN

ONE LIMIT RELATION IN THE SYSTEM M/G/1

In the queuing system M/G/1, using the limit theorem for semiregenerating processes, a relationship for the joint distribution of some important random processes, characterizing the functioning of the system in the mode of FIFO (first-in-first-out) is found.

Keywords: Poisson distribution, semiregenerating processes, Markov chain, queue length, stationary distribution.