УДК 517.53

В.С. ЗАКАРЯН, И.В. ОГАНИСЯН

ОБ ОЦЕНКАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕЙЛОРА НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $N_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$

Обобщая класс мероморфных в единичном круге функций Р. Неванлинны, М.М. Джрбашян вводил классы N_α и произведения B_α, $-1<\alpha<+\infty$. В работе получены оценки для коэффициентов Тейлора некоторых аналитических функций классов $N_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$, выраженные сходимостью некоторых рядов от модулей коэффициентов Тейлора этих функций. Проведено их сравнение с ранее известными оценками.

Ключевые слова: классы М.М. Джрбашяна, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, коэффициенты Тейлора.

М.М. Джрбашяном [1, глава IX], [2] введены в рассмотрение классы $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ мероморфных в единичном круге $\mathbb{D}=\left\{z:\left|z\right|<1\right\}$ функций и установлено их параметрическое представление, так что класс N_0 совпадает с классом N Неванлинны.

Важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$.

Известно, что аналитическая функция класса N_α имеет вид (см. [1,2])

$$f\left(z\right)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^\lambda B_\alpha\left(z;\left\{a_n\right\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi\left(\theta\right)\right\},\qquad(1)$$

где γ - произвольное вещественное число; λ- произвольное натуральное число; $K_\alpha=\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+\alpha\right)}$; $\psi\left(\theta\right)$- вещественная функция с конечным полным изменением на $\left[-\pi;\pi\right]$,

$$B_\alpha\left(z;\{z_k\}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;z_k)},$$

$$W_\alpha(z,\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right\}z^k,\ |z|<1,\ |\xi|<1,$$

$$S_\alpha(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right],\ |z|<1. \qquad (2)$$

$B_\alpha\left(z;\{z_k\}\right)$ - произведение М.М. Джрбашяна с последовательностью нулей $\{z_k\}\subset \mathbb{D}$, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha}<+\infty, \qquad (3)$$

которое в специальном случае $\alpha=0$ совпадает с произведением Бляшке:

$$B_0\left(z;\{z_k\}\right)=B\left(z;\{z_k\}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\frac{|z_k|}{z_k}.$$

Класс $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ определяется как множество аналитических функций $f(z)$ из N_α, для которых в представлении (1) функция $\psi(\theta)$ - невозрастающая на промежутке $[0,2\pi]$. Известно [2], что класс $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ имеет важную роль в вопросах представления функций класса $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, а класс $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<0\right)$ является некоторым подмножеством ограниченных аналитических функций класса $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$.

В работе существенным образом используются некоторые свойства классов $T_\beta\left(0<\beta<1\right)$ Л. Карлесона. Для любого заданного значения $\beta\left(0<\beta<1\right)$ класс T_β определяется (см. [3]) как множество мероморфных в $\mathbb{D}$ функций $f(z)$, для которых

$$T_\beta(f)\equiv\int_0^1\frac{A(r;f)}{(1-r)^\beta}dr<+\infty,\ \text{где}\ A(r;f)=\iint_{|z|<r}\frac{|f'(z)|^2}{\left(1+|f(z)|^2\right)^2}dxdy.$$

В работе использованы следующие свойства классов T_β ([3]).

Теорема (Карлесон). Если ограниченная аналитическая в $\mathbb{D}$ функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

принадлежит классу $T_\beta\,(0<\beta<1)$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^\beta\left|a_n\right|^2<+\infty .$$

Отметим также, что классы $T_\beta\,(0<\beta<1)$ обладают свойством замкнутости относительно сложения и умножения ([3]).

Как обычно, n-й коэффициент Тейлора функции $f(z)$ будем обозначать через $\hat{f}(n)$. В работе [4] оценены коэффициенты Тейлора функций класса $A_\alpha^*\,(-1<\alpha\le 0)$**:**

Теорема А. Пусть $f(z)$ - функция класса A_α^* $(-1<\alpha\le 0)$. Тогда

$$\left|\hat{f}(n)\right|=O\left(n^\alpha\right),\ n\to\infty .$$

В этой работе для коэффициентов Тейлора функций класса $A_\alpha^*\,(-1<\alpha<0)$ доказаны оценки другого типа, выраженные суммируемостью определенных рядов, содержащих модули коэффициентов Тейлора этих функций. Доказана независимость этих оценок друг от друга.

В работе доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и* $\{z_k\}$ *– любая последовательность комплексных чисел из* $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (3). *Тогда для коэффициентов Тейлора произведений Бляшке и Джрбашяна выполняются следующие условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{B}(n)\right|^2 n^{-\alpha}<+\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{B}_\alpha(n)\right|^2 n^{-\alpha}<+\infty .$$

Далее доказываются аналогичные результаты для функций без нулей и для любой функции этого класса.

Теорема 2. *Пусть* $-1 < \alpha < 0$ *и*

$$g_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},\ |z| < 1,$$

где $\omega(\theta)$ *– невозрастающая функция конечной вариации на* $[0,2\pi]$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta}\left|\hat{g}_\beta(n)\right|^2 < +\infty$$

для любого значения $\beta,\ \alpha < \beta \le 0$.

Доказательство. Пользуясь определением (2) ядра S_α , имеем

$$g_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi\cdot\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2\pi}\frac{2d\omega(\theta)}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{1+\alpha}}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi\cdot\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2\pi}d\omega(\theta)\right\}.$$

В работе [5] доказано, что функция

$$k_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\omega(\theta)}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{1+\alpha}}\right\},|z| < 1$$

принадлежит классу $T_{-\beta},\ \beta\in(\alpha;0]$. Значит, классу $T_{-\beta},\ \beta\in(\alpha;0]$ принадлежит и функция $g_\alpha(z)$. Следовательно, сходится соответствующий ряд теоремы Карлесона.

Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Далее, пользуясь полученными результатами, доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ *- любая функция класса* $A_\alpha^*(-1 < \alpha < 0)$. *Тогда выполняется следующее условие:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta}\left|\hat{f}(n)\right|^2 < +\infty$$

для любого значения $\beta,\ \alpha < \beta \le 0$.

На примерах можно убедиться, что никакая из приведенных оценок не является следствием другой, то есть справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Теоремы* **A** *и 3 представляют независимые оценки для коэффициентов Тейлора любой функций класса* $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<0\right)$.

Замечание. *В работе [6] были рассмотрены вопросы, аналогичные теоремам 1-3, где в теоремах 2 и 3 были допущены неточности, утверждая результаты теорем для значения параметра* $\beta=\alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. - М.: Наука,1966. – 672с.
2. **Джрбашян М.М., Захарян В.С.** Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге. - М.: Наука, 1993. – 224с.
3. **Carleson L.** On a class of meromorphic functions and associated exceptional sets.- Appelbergs Boktryckeri, Uppsala, 1950. MR 11.- 427p.
4. **Оганисян И.В.** Об одном представлении функций класса М.М. Джрбашяна// ДАН АрмССР.- 1989. - Т.88, №2.-С.55- 60.
5. **Джрбашян М.М., Захарян В.С.** О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α // ДАН СССР. Мат. -1967.-Т. 173, N6.- С.1247-1250.
6. **Захарян В.С., Оганисян И.В.** О коэффициентах Тейлора одного класса аналитических в круге функций// Докл. НАН РА.-2014. -Т.114, №3.- С.192-198.

Վ.Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ, Ի.Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

$N_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$ ԴԱՍԵՐԻ ՈՐՈՇ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԹԵՅԼՈՐԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Մ.Մ. Ջրբաշյանը, ընդանրացնելով միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների Ռ. Նևանլինայի դասը, ներմուծել է N_α դասերը և B_α արտադրյալները՝ $-1<\alpha<+\infty$ ։ Աշխատանքում $N_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$ դասերի որոշ անալիտիկ ֆունկցիաների Թեյլորի գործակիցների համար ստացվում են գնահատականներ՝ արտահայտված այդ գործակիցների մոդուլներն ընդգրկող որոշակի շարքերի զուգամիտությամբ։ Դրանք համեմատվում են մինչ այդ հայտնի գնահատականների հետ։

Առանցքային բառեր. Ջրբաշյանի դասեր, Բլյաշկեի արտադրյալ, Ջրբաշյանի արտադրյալ, Թեյլորի գործակիցներ։

V.S. ZAKARYAN, I.V. HOVHANNISYAN

ESTIMATES OF TAYLOR COEFFICIENTS OF SOME ANALYTICAL FUNCTIONS OF THE CLASSES $N_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$

M.M. Djrbashyan has generalized the class of R. Nevanlinna monomorphic functions, introducing classes N_α and products B_α, $-1<\alpha<+\infty$. Estimates for the Taylor coefficients of some analytical functions of classes $N_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$ expressed by the convergence of some series containing modulus of these coefficients are obtained. These and previously known estimates are shown to be independent.

Keywords: classes of M.M. Djrbashyan**,** product of Blaschke, product of Djrbashyan, Taylor coefficients.

УДК 514.752.44

В.А. МИРЗОЯН, Г.С. МАЧКАЛЯН, Г.А. НАЛБАНДЯН

РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ЕДИНИЧНЫМ ИНДЕКСОМ РЕГУЛЯРНОСТИ И ПРОИЗВОЛЬНЫМ ИНДЕКСОМ СИНГУЛЯРНОСТИ

В евклидовых пространствах исследуется локальная структура нормально плоских полуэйнштейновых подмногообразий с единичным индексом регулярности и одним регулярным главным вектором кривизны.

Ключевые слова: риччи-полусимметрические подмногообразия, полуэйнштейновы подмногообразия, прямые произведения, конусы.

Введение. Пусть M − риманово многообразие с римановой связностью ∇ и операторами кривизны $R(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}$, а R_1 − тензор Риччи типа (1,1). Действие этих операторов на R_1 определяется формулой

$$(R(X,Y)R_1)(Z)=R(X,Y)R_1(Z)-R_1(R(X,Y)Z).$$

Если $R\left(X,Y\right)R_1=0$ для любых векторных полей X, Y, то многообразие называется риччи-полусимметрическим [1-7].

Пусть M − m-мерное подмногообразие евклидова пространства E_n и $O(E_n,M)$ − главное расслоение адаптированных ортонормреперов $\left\{x,e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n\right\}$, где $x\in M$, $e_i\in T_x\left(M\right)$, $e_\alpha\in T_x^{\perp}\left(M\right)$, а $T_x\left(M\right)$ и