V.S. ZAKARYAN, I.V. HOVHANNISYAN

ESTIMATES OF TAYLOR COEFFICIENTS OF SOME ANALYTICAL FUNCTIONS OF THE CLASSES $N_\alpha \left(-1 < \alpha \le 0\right)$

M.M. Djrbashyan has generalized the class of R. Nevanlinna monomorphic functions, introducing classes N_α and products B_α, $-1 < \alpha < +\infty$. Estimates for the Taylor coefficients of some analytical functions of classes $N_\alpha \left(-1 < \alpha \le 0\right)$ expressed by the convergence of some series containing modulus of these coefficients are obtained. These and previously known estimates are shown to be independent.

Keywords: classes of M.M. Djrbashyan**,** product of Blaschke, product of Djrbashyan, Taylor coefficients.

УДК 514.752.44

В.А. МИРЗОЯН, Г.С. МАЧКАЛЯН, Г.А. НАЛБАНДЯН

РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ЕДИНИЧНЫМ ИНДЕКСОМ РЕГУЛЯРНОСТИ И ПРОИЗВОЛЬНЫМ ИНДЕКСОМ СИНГУЛЯРНОСТИ

В евклидовых пространствах исследуется локальная структура нормально плоских полуэйнштейновых подмногообразий с единичным индексом регулярности и одним регулярным главным вектором кривизны.

Ключевые слова: риччи-полусимметрические подмногообразия, полуэйнштейновы подмногообразия, прямые произведения, конусы.

Введение. Пусть $M-$риманово многообразие с римановой связностью ∇ и операторами кривизны $R(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}$, а R_1-тензор Риччи типа (1,1). Действие этих операторов на R_1 определяется формулой

$$(R(X,Y)R_1)(Z)=R(X,Y)R_1(Z)-R_1(R(X,Y)Z).$$

Если $R\left(X,Y\right)R_1=0$ для любых векторных полей X,Y, то многообразие называется риччи-полусимметрическим [1-7].

Пусть $M-m$-мерное подмногообразие евклидова пространства E_n и $O(E_n,M)-$главное расслоение адаптированных ортонормреперов $\{x,e_1,\ldots,e_m,e_{m+1},\ldots,e_n\}$, где $x\in M$, $e_i\in T_x\left(M\right)$, $e_\alpha\in T_x^{\perp}\left(M\right)$, а $T_x\left(M\right)$ и

$T_x^{\perp}(M)$ обозначают касательное и нормальное пространства к M в точке x, $i,j,k=1,\dots,m,\ \ \alpha,\beta=m+1,\dots,n$. По известной схеме имеем

$$\omega^{\alpha}=0,\ \ \omega_i^{\alpha}=h_{ij}^{\alpha}\omega^{j},\ \ h_{ij}^{\alpha}=h_{ji}^{\alpha},\ \ h_{ijk}^{\alpha}=h_{ikj}^{\alpha},\ \ dh_{ij}^{\alpha}+h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}-h_{kj}^{\alpha}\,\omega_i^{k}-h_{ik}^{\alpha}\omega_j^{k}=h_{ijk}^{\alpha}\omega^{k},$$

где h_{ij}^{α} – компоненты второй фундаментальной формы α_2, ω_i^{j} – 1-формы римановой связности ∇ на M, а ω_{α}^{β} – 1-формы нормальной связности $\nabla^{\perp}$.

Если $\alpha_2=0$, то подмногообразие называется вполне геодезическим. Компоненты тензоров кривизны R и $R^{\perp}$ связностей ∇, $\nabla^{\perp}$ и тензора Риччи R_1 определяются по формулам

$$R_{ikl}^{j}=-\sum_{\alpha}h_{i[k}^{\alpha}h_{l]j}^{\alpha},\ \ R_{\alpha kl}^{\beta}=-\sum_{i}h_{i[k}^{\alpha}h_{l]i}^{\beta},\ \ R_{ik}=R_{ikl}^{l}=\sum_{\alpha}\left(h_{il}^{\alpha}\,h_{k}^{\alpha l}-H^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}\right),$$

где $h_k^{\alpha l}=h_{kl}^{\alpha}$, а $H^{\alpha}=h_{ij}^{\alpha}\delta^{ij}$ –компоненты вектора средней кривизны $H=H^{\alpha}e_{\alpha}$. Если $R=0$, то подмногообразие называется локально евклидовым. При $R^{\perp}=0$ оно называется нормально плоским, а при $R_1=0$ – риччи-плоским.

Пусть M –нормально плоское подмногообразие, т.е. $R_{\alpha ij}^{\beta}=0$. Тогда матрицы $\left\|h_{ij}^{\alpha}\right\|$ могут быть одновременно приведены к виду $\left\|\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}\right\|$. Нормальные векторы $n_i=\lambda_i^{\alpha}e_{\alpha}$ называются *главными векторами кривизны* (г.в.к.) нормально плоского подмногообразия в E_n. Если $<\,,\,>$ – скалярное произведение в E_n, то $R_{ik}=\rho_i\,\delta_{ik}$, где $\rho_i=|n_i|^2-<H,n_i>$. Регулярные и сингулярные г.в.к. были определены в [4]. Размерность линейной оболочки регулярных векторов называется *индексом регулярности* (i_R), а число ненулевых сингулярных векторов – *индексом сингулярности* (i_S). Ненулевые сингулярные г.в.к. однократны, взаимно ортогональны и ортогональны также всем остальным г.в.к. Справедливо неравенство $0\le\mu-\nu+i_R\le n-m$ [4]. Для того, чтобы подмногообразие M в E_n было риччи–полусимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы любые два его г.в.к. n_i и n_j удовлетворяли одному из следующих условий: $|n_i|^2-\langle n_i,H\rangle=|n_j|^2-\langle n_j,H\rangle$ или $\langle n_i,n_j\rangle=0$. Регулярные г.в.к. естественным образом разбиваются на группы $W,^{(1)}\dots,W,^{(t)}$ которые соответствуют ненулевым собственным значениям $\rho_1,\ldots,\rho_t$ тензора Риччи R_1. Нулевому собственному значению тензора Риччи R_1 соответствуют нулевой г.в.к., все сингулярные г.в.к. и некоторые регулярные г.в.к. Это множество будем обозначать через $W.^{(0)}$ Справедливо следующее утверждение ([5]): *если в какой-либо группе* $W,^{(\sigma)}$ $\sigma>0$, *имеются неравные коллинеарные векторы, то их число равно двум.*

Постановка задачи. Пусть в E_n тензор Риччи m-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M имеет только одно ненулевое собственное значение. Тогда M допускает или одну группу г.в.к. $W,^{(1)}$ или две группы г.в.к. $W^{(0)}$ и $W,^{(1)}$ которые соответствуют нулевому и ненулевому собственным значениям тензора Риччи. Предположим, что M имеет единичный индекс сингулярности, т.е. $i_S=\mu-\nu=1$, где μ и $\nu-$ индексы дефектности и относительной дефектности. (Если индекс сингулярности считать произвольным, то это приведёт только к усложнению вычислений, однако не будет влиять на общность основного результата и его формулировку). Условие $i_R=1$ означает, что размерность линейной оболочки векторов группы $W^{(1)}$ равна 1, т.е. в $W^{(1)}$ все векторы коллинеарны и, как мы знаем, отвечают единственному ненулевому собственному значению ρ тензора Риччи. Условие $\mu=\nu+1$ означает, что группа $W^{(0)}$ содержит только один ненулевой сингулярный г.в.к. и, возможно, нулевой г.в.к. Регулярных г.в.к. группа $W^{(0)}$ содержать не может. Возможны два случая: 1) группа $W^{(1)}$ состоит из одного регулярного г.в.к. n_1, имеющего кратность; 2) группа $W^{(1)}$ состоит из двух коллинеарных регулярных г.в.к. Здесь мы рассмотрим только случай (1).

Итак, пусть группа $W^{(1)}$ регулярных г.в.к. состоит из одного вектора n_1 кратности $p\geq 2$. Поскольку $\mu=\nu+1$, то M допускает только один ненулевой сингулярный г.в.к. n_2. Как мы знаем, кратность n_2 равна единице и $n_2\perp n_1$ [4]. Пусть $T_x^{(n_1)}$ и $T_x^{(n_2)}$ обозначают собственные подпространства, соответствующие векторам n_1 и n_2. Тогда в каждой точке $x\in M$ фактически $T_x^{(0)}=T_x^{(n_2)}\oplus T'_x$, где T'_x-пространство относительной дефектности, а пространство кодефектности $T_x^{(1)}$ совпадает с $T_x^{(n_1)}$. Пространство T'_x соответствует нулевому г.в.к. Поскольку $\dim T_x^{(n_1)} = p$, $\dim T_x^{(n_2)} = 1$, то $\nu = \dim T_x' = m - p - 1$. Пусть $\{x_1, e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n\}$ – адаптированный ортонормрепер, т.е.

$$e_1, \ldots, e_p \in T_x^{(n_1)},\ e_{p+1} \in T_x^{(n_2)},\ e_{p+2}, \ldots, e_m \in T_x',\ e_{m+1}, \ldots, e_n \in T_x^{\perp}(M),$$

$$i, j, k = 1, \ldots, m,\ a, b, c = 1, \ldots, p,\ u, v, w = p+1, \ldots, m,$$

$$\alpha, \beta = m+1, \ldots, n,\ \gamma, \delta = m+3, \cdots, n \ldots .$$

Пусть матрицы $\left\| h_{ij}^{\alpha} \right\|$ одновременно приведены к виду $\left\| \lambda_i^{\alpha} \delta_{ij} \right\|$. Тогда $n_1 = \lambda_a^{\alpha} e_{\alpha}$, $n_2 = \lambda_{p+1}^{\alpha} e_{\alpha}$, причем $\lambda_a^{\alpha} = \lambda_b^{\alpha}, a \neq b$, в силу кратности вектора n_1. Так как $n_1 \perp n_2$, то векторы e_{m+1}, e_{m+2} можем выбрать сонаправленно с векторами n_1 и n_2 соответственно. При таком выборе для векторов n_1, n_2 получим следующие формулы: $n_1 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1}$, $n_2 = \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}$, $\lambda_a^{m+1} > 0$, $\lambda_{p+1}^{m+2} > 0$. Пусть $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ – корепер, двойственный к реперу $\{x_1, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. Тогда на M выполняются следующие соотношения:

$$\omega^{\alpha} = 0,\ \omega_i^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha} \delta_{ij} \omega^j,\ d\lambda_i^{\alpha} \delta_{ij} + \lambda_i^{\beta} \delta_{ij} \omega_{\beta}^{\alpha} + \left(\lambda_j^{\alpha} - \lambda_i^{\alpha}\right) \omega_j^i = h_{ijk}^{\alpha} \omega^k .$$

В третьем уравнении, придавая индексам различные допустимые значения, можем получить следующие соотношения:

$$h_{abk}^{\alpha} = 0,\ a \neq b,\ h_{aaa}^{\alpha} = 0,\ h_{aau}^{\alpha} = h_{bbu}^{\alpha},\ a \neq b,\ \ h_{auv}^{\alpha} = 0,\ \ h_{aau}^{m+2} = 0,\ u > p+1,$$

$$h_{uvk}^{\alpha} = 0,\ u, v > p+1,\ h_{(p+1)(p+1)u}^{m+1} = 0,\ u > p+1,\ h_{(p+1)(p+1)u}^{\gamma} = 0,\ u > p+1,\ h_{aau}^{\gamma} = 0 .$$

$$d\lambda_a^{m+1} = h_{aau}^{m+1} \omega^u,\ \lambda_a^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{aa(p+1)}^{m+2} \omega^{p+1},\ \lambda_a^{m+1} \omega_a^u = h_{aau}^{m+1} \omega^a,$$

$$\lambda_{p+1}^{m+2} \omega_a^{p+1} = -h_{aa(p+1)}^{m+2} \omega^a,\ d\lambda_{p+1}^{m+2} = h_{(p+1)(p+1)u}^{m+2} \omega^u,\ \lambda_{p+1}^{m+2} \omega_{m+1}^{m+2} = -h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+1} \omega^{p+1},$$

$$\lambda_{p+1}^{m+2} \omega_{p+1}^u = h_{(p+1)(p+1)u}^{m+2} \omega^{p+1},\ u > p+1,\ \lambda_{p+1}^{m+2} \omega_{m+2}^{\gamma} = h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{\gamma} \omega^{p+1} .$$

Дифференциальную систему можем преобразовать к виду

$$d \ln \left| \lambda_a^{m+1} \right| = A_u \omega^u,\ d \ln \left| \lambda_{p+1}^{m+2} \right| = D_u \omega^u,\ \omega_a^u = A_u \omega^a,\ \omega_{p+1}^u = D_u \omega^{p+1},$$

$$\omega_{m+1}^{m+2} = B \omega^{p+1},\ \omega_{m+2}^{\gamma} = E_{\gamma} \omega^{p+1},\ \omega_i^{\gamma} = \omega_{m+1}^{\gamma} = \omega_u^{m+1} = \omega_a^{m+2} = 0, \qquad (1)$$

$$\omega_u^{m+2}=0,\, u>p+1,\ \lambda_{p+1}^{m+2}A_{p+1}+\lambda_a^{m+1}B=0,$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_u=\frac{h_{aau}^{m+1}}{\lambda_a^{m+1}},\ B=\frac{h_{aa(p+1)}^{m+2}}{\lambda_a^{m+1}}=-\frac{h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+1}}{\lambda_{p+1}^{m+2}},\ D_u=\frac{h_{(p+1)(p+1)u}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}},\ E_\gamma=\frac{h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{\gamma}}{\lambda_{p+1}^{m+2}}.$$

Непосредственно можно проверить, что внешние дифференцирования уравнений $\omega_i^\gamma=\omega_{m+1}^\gamma=\omega_u^{m+1}=\omega_a^{m+2}=0$, $\omega_u^{m+2}=0, u>p+1$ к новым условиям не приводят. Дифференцируя внешним образом остальные уравнения системы (1) и применяя лемму Картана, получим

$$dA_u-A_v\omega_u^v=A_uA_v\omega^v,\ dB-BD_u\omega^u=G\omega^{p+1},\ dD_u-D_v\omega_u^v=D_{uv}\omega^v,\ D_{uv}=D_{vu},$$
$$dD_u-D_v\omega_u^v-D_uD_v\omega^v=F_u\omega^{p+1},\ dE_\gamma-E_\delta\omega_\gamma^\delta-E_\gamma D_v\omega^v=N_\gamma\omega^{p+1},$$
$$\sum_u A_uD_u=A_{p+1}\frac{G}{B},\, u>p+1.$$

Эти условия являются условиями интегрируемости системы (1). Если в (1) $E_\gamma=0$, то можно показать, что подмногообразие M имеет существенную коразмерность два. Распределения $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}, T'$, $T^{(0)}=T^{(n_2)}+T'$ задаются следующими дифференциальными системами:

$$T^{(n_1)}:\omega^\alpha=0,\omega^u=0,\ T^{(n_2)}:\omega^\alpha=0,\ \omega^a=0,\ \omega^u=0,\ u>p+1,$$
$$T':\omega^\alpha=0,\ \omega^a=0,\ \omega^{p+1}=0,\ T^{(0)}=T^{(n_2)}+T':\ \omega^\alpha=0,\ \omega^a=0.$$

Используя уравнения системы (1), легко проверить, что все они интегрируемы. Интегральное многообразие распределения $T^{(n_1)}$ представляет собой сферу $S^p(r)$ размерности p и радиуса

$$r=((\lambda_a^{m+1})^2+\sum_u A_u^2)^{-1}.$$

Интегральное многообразие распределения $T^{(n_2)}$ представляет собой кривую L с единичным касательным вектором e_{p+1}, а интегральное многообразие распределения $T'-$плоскость размерности $\nu=\mu-1$. Поскольку $de_{p+1}\neq 0$, то L не является прямой. Интегральное многообразие $M^{(0)}$ распределения $T^{(0)}$ представляет собой $\mu-$мерное локально евклидово и вполне геодезическое в M подмногообразие индекса относительной дефектности $\mu-1$. Из третьего уравнения системы (1) следует, что сфера $S^p\left(r\right)$ является вполне омбилическим подмногообразием в M. Это утверждение не зависит от числа сингулярных г.в.к. Таким образом, выполняются условия следующей теоремы, доказанной в [3]: *пусть $\tilde{M}$ – n-мерное риманово многообразие с индексом дефектности $\mu \neq 0$ и интегрируемым распределением кодефектности $\tilde{T}^{(1)}$; если его интегральное многообразие $\tilde{M}^{(1)}$ является вполне омбилическим в $\tilde{M}$, то $\tilde{M}$ локально изометрично либо цилиндру над $\tilde{M}^{(1)}$, либо цилиндру с $(\mu-1)$-мерными образующими над конусом, построенным над $\tilde{M}^{(1)}$*. На основании этой теоремы заключаем, что M локально изометрично либо цилиндру с μ-мерными образующими над $S^p\left(r\right)$, либо цилиндру с $(\mu-1)$-мерными образующими над конусом, построенным над $S^p\left(r\right)$. Распределение $T^{(n_1)}+T^{(n_2)}$ задаётся дифференциальной системой $\omega^\alpha=0$, $\omega^u=0$, $u>p+1$. Легко проверить, что оно интегрируемо. Его интегральное многообразие есть однопараметрическое семейство сфер (т.е. каналово подмногообразие) с неотрицательными секционными кривизнами. Учитывая, что распределения $T^{(n_1)},T^{(n_2)},T'$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2, рассмотрим несколько случаев. Если на подмногообразии M параллельны распределения:

а) $T^{(n_1)},T^{(n_2)},T'$, то M является произведением сферы, кривой и плоскости;

б) $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}+T'$, то M является произведением сферы и локально евклидова подмногообразия индекса относительной дефектности $\mu-1$;

в) $T^{(n_1)}+T'$, $T^{(n_2)}$, то M является произведением конуса над сферой, плоскости и кривой;

г) $T^{(n_1)}+T^{(n_2)}$, T', то M является произведением каналова подмногообразия с неотрицательными секционными кривизнами и плоскости.

Теорема. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское риччи-полусимметрическое m-мерное подмногообразие M, удовлетворяющее условиям $i_R=1$, $\mu=\nu+k$ и допускающее только один регулярный г.в.к. кратности $p\geq 2$, локально изометрично либо цилиндру с μ-мерными образующими над $S^p\left(r\right)$, либо цилиндру с $(\mu-1)$-мерными образующими над ко-*

нусом, построенным над $S^p(r)$. Минимальная коразмерность такого подмногообразия может быть равна $k+1$. В частном случае, когда $\mu = \nu + 1$, M может быть произведением сферы, кривой и плоскости, или произведением сферы и локально евклидова подмногообразия индекса относительной дефектности $\mu - 1$, или произведением конуса над сферой, плоскости и кривой, или произведением каналова подмногообразия с неотрицательными секционными кривизнами и плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lumiste Ü**. Semiparallel submanifolds in space forms. -New York: Springer, 2009. -306p.
2. **Мирзоян В.А.** Структурные теоремы для римановых Ric-полусимметрических пространств // Изв. Вузов. Математика. -1992. -№6. –С. 80-89.
3. **Мирзоян В.А.** Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий // Изв. РАН. Сер.матем. -2003. -67, №5. –С. 107-124.
4. **Мирзоян В.А.** Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2011. - 75, № 6. – С. 47-78.
5. **Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С**. О нормально плоских $Ric-$полусимметрических подмногообразиях в евклидовых пространствах // Изв.вузов. Матем. - 2012. -№ 9. - С.19-31.
6. **Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С**. Подмногообразия с одним регулярным и одним сингулярным главными векторами кривизны//Вестник Государственного инженерного университета Армении. -2014. -Часть 1.-С. 8-12.
7. **Мирзоян В.А., Назарян А.Р.** Ric-полусимметрические подмногообразия с одним ненулевым собственным значением тензора Риччи // Вестник Национального политехнического университета Армении. - 2015. - Часть 1.- С.3-9.

Վ.Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, Գ.Ս. ՄԱՉԿԱԼՅԱՆ, Գ.Ա. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ

ՐԻՉՉԻ-ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՌԵԳՈՒԼՅԱՐՈՒԹՅԱՆ ՄԻԱՎՈՐ ԻՆԴԵՔՍՈՎ ԵՎ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ԻՆԴԵՔՍՈՎ

Էվկլիդեսյան տարածություններում հետազոտվում է նորմալ հարթ կիսաէյնշտեյն-յան ենթաբազմաձևությունների լոկալ կառուցվածքը ռեգուլյարության միավոր ինդեքսի և մեկ ռեգուլյար կորության գլխավոր վեկտորի դեպքում:

Առանցքային բառեր. Ռիչչի–կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, կիսա-էյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ, ուղիղ արտադրյալներ, կոներ:

V.A. MIRZOYAN, G.S. MACHKALYAN, G. A. NALBANDYAN

RICCI-SEMI-SYMMETRIC SUBMANIFOLDS WITH A UNITY INDEX OF REGULARITY AND AN ARBITRARY INDEX OF SINGULARITY

The local structure of normally flat semi-Einstein submanifods with a unity index of regularity and one regular principal curvature vector are studied in Euclidean spaces.

Keywords: Ricci-semi-symmetric submanifolds, semi-Einstein submanifolds, direct products, cones.

УДК 517. 948

С.А. ЕПИСКОПОСЯН, Т.М. САГАТЕЛЯН

О СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ КРИСТЕНСОНА - ЛЕВИ ПО НОРМЕ $L^{\infty}[0,1)^2$

Рассматриваются вопросы сходимости двойных рядов Фурье системы Кристенсона-Леви Ψ_a по норме $L^{\infty}[0,1)^2$ после исправления значений функции на множестве малой меры.

Ключевые слова: система Кристенсона-Леви, равномерная сходимость, норма.

Определение 1. Примем, что все ненулевые члены в последовательности $\{\mathcal{D}_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям, если из $k_2 \geq k_1, s_2 \geq s_1, k_2 + s_2 > k_1 + s_1, \mathcal{D}_{k_2,s_2} \neq 0, \mathcal{D}_{k_1,s_1} \neq 0$ следует, что $\mathcal{D}_{k_2,s_2} < \mathcal{D}_{k_1,s_1}$. Пусть $\{w_k(x)\}_{k=0}^{\infty}, x \in [0,1)$ - ортонормированная система функций. Коэффициенты Фурье функции $f(t,\tau) \in L^1[0,1)^2$ по двойной ортонормированной системе $\{w_k(x)w_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ обозначим через