УДК 517.946

Г.М. АЙРАПЕТЯН, А.Д. ОГАНЯН

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Рассматривается граничная задача Римана в единичном круге в смысле сходимости пространства $L^1(\rho)$. Доказывается, что однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых решений. Решение неоднородной задачи получено в явном виде.

Ключевые слова: граничная задача Римана, весовое пространство, линейно независимые решения, индекс, решение неоднородной задачи.

1. Пусть G^+ - односвязная область комплексной плоскости C, ограниченная спрямляемой кривой L, а G^- - дополнение множества $G^+ \bigcup L$. Классическая постановка граничной задачи Римана следующая (см. [1-4]): определить аналитические в $G^\pm$ функции $\varphi^\pm$ $(\varphi^-(\infty)=0)$ так, чтобы имело место равенство

$$\varphi^+(t)-a(t)\varphi^-(t)=f(t), \ \ t\in L,$$

где a и f - заданные функции на L. Исследование этой задачи опирается на тот факт, что интеграл типа Коши является ограниченным оператором в пространствах C^α и L^p $(1<p<\infty)$. Для исследования граничной задачи Римана в классе L^1 в работе [5] была предложена новая постановка этой задачи: определить аналитические функции $\varphi^\pm$ $(\varphi^-(\infty)=0)$ так, чтобы имело место равенство

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\varphi^+(rt)-a(t)\varphi^-(r^{-1}t)-f(t)\right\|_{L^1}=0\,.$$

В аналогичной постановке задача Римана исследована в пространствах C, L^∞ (см. [6-8]). В работах [9-11] исследованы граничные задачи в весовых пространствах, когда весовая функция равняется нулю в конечном числе граничных точек. В предлагаемой работе рассматривается граничная задача Римана в единичном круге $D^+=\{z:|z|<1\}$ в следующей постановке: определить аналитическую в $D^{+}\bigcup D^{-}$ функцию φ ($\varphi(\infty)=0$), удовлетворяющую равенству

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\varphi^{+}(rt)-a(t)\varphi^{-}\left(r^{-1}t\right)-f(t)\right\|_{L^{1}_{(\rho)}}=0\,, \tag{1}$$

где $\rho(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\left|t_k-t\right|^{\delta_k}$, $1>\delta_k>0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k<\infty,\ t_k\in T,\ T=\left\{z;|z|=1\right\}$. Будем предполагать, что $t_k=e^{i\theta_k}$, $\theta_k\downarrow 0$.

2. В этом пункте будем рассматривать задачу (1), когда $a(t)\equiv 1$.

Теорема 1. Пусть $\left\{A_k\right\}_1^{\infty}$ - последовательность комплексных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|A_k\right|<\infty\ . \tag{2}$$

Тогда

$$\Phi_0(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-t_k}$$

является решением однородной задачи

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\varphi^{+}(rt)-\varphi^{-}\left(r^{-1}t\right)\right\|_{L^{1}_{(\rho)}}=0\,. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\Phi_{0\kappa}(z)=\left(z-t_k\right)^{-1}$, $k=1,2,\ldots$ Так как

$$\Phi_{0\kappa}(rt)-\Phi_{0\kappa}\left(r^{-1}t\right)=\frac{1-r^2}{\left|t_k-rt\right|^2}\ ,$$

то

$$\int_T\frac{\left(1-r^2\right)}{\left|t_k-rt\right|^2}\left|t-t_k\right|^{\delta_k}\left|dt\right|\to 0\,.$$

Далее имеем

$$\Phi_0\left(rt\right)-\Phi_0\left(r^{-1}t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k\left(1-r^2\right)}{|\,t_{\ k}-rt\,|^2}.$$

Поскольку эта сумма равномерно сходится, то

$$\int_T\left|\Phi_0\left(rt\right)-\Phi_0\left(r^{-1}t\right)\right|\rho\left(t\right)\left|dt\right|\le C\sum_{k=1}^{\infty}A_k\int_T\frac{\left(1-r^2\right)\left|t_k-t\right|^{\delta_k}}{\left|t_k-rt\right|^2}\left|dt\right|\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|A_k\right|(1-r)^{1-\delta_k}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|A_k\right|(1-r)^{1-\delta_k}\to 0$$

при $r\to 1-0$, получаем доказательство теоремы.

3. Пусть $t_k^{'}=e^{\frac{i}{2}(arg t_{k+1}+arg t_k)}$. Обозначим

$$f_k\left(t\right)=\begin{cases} f\left(t\right), t\in\left[t_k^{'},t_{k+1}^{'}\right) \\ 0, t\in T\setminus\left[t_k^{'},t_{k+1}^{'}\right) \end{cases}$$

Пусть далее

$$\varphi_{1k}\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i(t_k-z)}\int_{T_k}\frac{f_k\left(t\right)\left(t_k-t\right)}{t-z}dt \qquad k=1,2,\dots.$$

Лемма 1. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\varphi_{1k}^{+}\ \left(rt\right)-\varphi_{1k}^{-}\ \left(r^{-1}t\right)-f_k\left(t\right)\right\|_{L^1(\rho)}=0\,.$$

Из теоремы 1 и леммы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $a\left(t\right)\equiv 1$. Тогда общее решение граничной задачи

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\varphi^{+}\left(rt\right)-\varphi^{-}\left(r^{-1}t\right)-f\left(t\right)\right\|_{L^1_{(\rho)}}=0$$

можно представить в виде $\varphi\left(z\right)=\varphi_0\left(z\right)+\varphi_1\left(z\right)$, где $\varphi_0\left(z\right)$ - общее решение однородной задачи (2), а

$$\varphi_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{1k}(z).$$

4. Функцию $a(t)$ из (1) представим в виде $a(t)=S^+(t)\left(S^-(t)\right)^{-1}$ (см. [2]), где

$$S^+(z)=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\ln\left(t^{-\aleph}a(t)\right)}{t-z}dt\right),\ z\in D^+,$$

$$S^-(z)=z^{-\aleph}\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\ln\left(t^{-\aleph}a(t)\right)}{t-z}dt\right),\quad z\in D^-,$$

где $\aleph=inda(t),\ t\in T.$ Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Справедливы следующие утверждения:

а) Если $\aleph\geq 0,$ то функция

$$\varphi_0(z)=S(z)\left(P_{\aleph-1}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-t_k}\right),$$

где $P_{\aleph-1}(z)$ - произвольный полином порядка $\aleph-1,$ а последовательность чисел $A_k,1,2,\ldots$ такая, что выполняется условие (2), является решением однородной задачи (1).

б) Если $\aleph<0,$ то функция

$$\varphi_0(z)=S(z)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-t_k}\right)$$

является решением однородной задачи (3). где числа $A_{1,}\ A_{2,}\ \ldots A_{\aleph}$ однозначно определяются через числа $A_{\aleph+1,}\ A_{\aleph+2,}\ \ldots$.

Решение задачи (1) можно представить в виде $\varphi(z)=\varphi_0(z)+\varphi_1(z),$ где $\varphi_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{1k}(z),$

$$\varphi_{1k}\left(z\right)=\frac{1}{t_k-z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_k}\frac{f\left(t\right)\left(t_k-t\right)}{t-z}dt\,.$$

Причем интервалы $T_k=\left(e^{i\theta_k},e^{i\theta_{k+1}}\right],k=1,2,\ldots$ не пересекаются, $t_k\in T_k$, $T=\bigcup T_k$.

Исследование выполнено при поддержке ГКН МОН РА в рамках совместного научного проекта NYSU-SFU-16/1, финансируемого в результате международного конкурса "ТКН МОН РА-ЕГУ-ЮФУ РФ - 2016".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи.- М.: Наука, 1977.-640с.
2. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения.- М.: Наука, 1968.-512с.
3. **Хведелидзе Б.В.** Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной// Итоги науки и техники. Сер.Современные проблемы математики.- 1975.- 7.- С. 5-162.
4. **Казарян К.С., Сориа Ф., Спитковский И.М.** Краевая задача Римана в пространствах с весом, допускающим особенности// Доклады РАН. - 1997.-353, №6.-С. 717-719.
5. **Айрапетян Г.М.** Разрывная задача Римана-Привалова в L^1 со сдвигом// Изв АН АрмССР. Мат.-1990.-25, №1.-С.3-20.
6. **Айрапетян Г.М., Бабаян В.А.** О задаче Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика.- 2011.-№17(112), вып. 24.-С. 5-15.
7. **Айрапетян Г.М., Погосян Л.В.** Задача Римана в смысле слабой сходимости //Материалы Международной конференции молодых ученых.-Нальчик: Изд. КБНЦ РАН, 2011.-С.32-35.
8. **Айрапетян Г.М., Погосян Л.В**. Граничная задача Римана--Гильберта для уравнения Бицадзе с граничными условиями из пространства мер//Доклады НАН Армении.- 2013.-112,№1.-С.127-132.
9. **Айрапетян Г.М**. О разрешимости задачи Дирихле с граничными функциями из пространств с весом// Мат. заметки.-2004.- 76, вып. 5.-С. 643-650.
10. **Айрапетян Г.М., Меликсетян П.Э**. Граничная задача Гильберта в полуплоскости в пространствах с весом//Изв. НАН Армении. Мат.- 2003.-38, №6. –С.17-32.
11. **Hayrapetyan H.M**. Dirichlet problem in the half plane for RO-varying weight functions// Topics in Analysis andApplications. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. Kluwer Academic Pubishers.-2004.-147. -P.311-316.

Հ.Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ա.Դ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ԻՆԴԵՔՍՈՎ ՄԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում է միավոր շրջանում Ռիմանի եզրային խնդիրը $L^1(\rho)$ կշռային տարածությունում: Ապացուցվում է, որ համասեռ խնդիրն ունի անվերջ թվով գծորեն անկախ լուծումներ: Բացահայտ տեսքով կառուցվում է նաև անհամասեռ խնդրի ընդհանուր լուծումը:

Առանցքային բառեր. Ռիմանի եզրային խնդիր, կշռային տարածություն, գծորեն անկախ լուծումներ, ինդեքս, անհամասեռ խնդրի լուծում:

H.M. HAYRAPETYAN, A.D. OHANYAN

ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH AN INFINITE INDEX

The Riemann boundary value problem in the $L^1(\rho)$ weighted space is considered in the unit disc. It is proved, that the homogeneous problem has an infinite number of linearly independent solutions. The general solution of the inhomogeneous problem is determined in an explicit form.

Keywords: Riemann boundary value problem, weighted space, linearly independent solutions, index, solution of inhomogeneous problem.

УДК 517. 948

Т.М. САГАТЕЛЯН

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНЗИТИВНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ - КРИСТЕНСОНА - ЛЕВИ

Рассматриваются вопросы поточечной универсальности, а также топологической транзитивности частичных сумм рядов Фурье функций класса L^p, $p \geq 1$ по системе Кристенсона-Леви порядка $a \geq 2$.

Ключевые слова: система Кристенсона-Леви, поточечная универсальность, топологичесская транзитивность.

Пусть X и Y - некоторые метрические пространства, а $T_n: X \to Y$, $n \in \Lambda \subset N_0$ - некоторые непрерывные отображения.

Определение 1 (Универсальный элемент). *Скажем, что элемент* $x_0 \in X$ *универсален в* Y *относительно* T_n, *если множество* $\{T_n x_0 \colon n \in \Lambda\}$ *всюду плотно в* Y, *т.е. для любого открытого множества* $V \subset Y$ *существует* $n_0 \in N$ *такое,*