Հ.Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ա.Դ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ԻՆԴԵՔՍՈՎ ՄԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում է միավոր շրջանում Ռիմանի եզրային խնդիրը $L^1(\rho)$ կշռային տարածությունում: Ապացուցվում է, որ համասեռ խնդիրն ունի անվերջ թվով գծորեն անկախ լուծումներ: Բացահայտ տեսքով կառուցվում է նաև անհամասեռ խնդրի ընդհանուր լուծումը:

Առանցքային բառեր. Ռիմանի եզրային խնդիր, կշռային տարածություն, գծորեն անկախ լուծումներ, ինդեքս, անհամասեռ խնդրի լուծում:

H.M. HAYRAPETYAN, A.D. OHANYAN

ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH AN INFINITE INDEX

The Riemann boundary value problem in the $L^1(\rho)$ weighted space is considered in the unit disc. It is proved, that the homogeneous problem has an infinite number of linearly independent solutions. The general solution of the inhomogeneous problem is determined in an explicit form.

Keywords: Riemann boundary value problem, weighted space, linearly independent solutions, index, solution of inhomogeneous problem.

УДК 517. 948

Т.М. САГАТЕЛЯН

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНЗИТИВНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ - КРИСТЕНСОНА - ЛЕВИ

Рассматриваются вопросы поточечной универсальности, а также топологической транзитивности частичных сумм рядов Фурье функций класса L^p, $p \geq 1$ по системе Кристенсона-Леви порядка $a \geq 2$.

Ключевые слова: система Кристенсона-Леви, поточечная универсальность, топологичесская транзитивность.

Пусть X и Y - некоторые метрические пространства, а $T_n: X \to Y$, $n \in \Lambda \subset N_0$ - некоторые непрерывные отображения.

Определение 1 (Универсальный элемент). *Скажем, что элемент* $x_0 \in X$ *универсален в* Y *относительно* T_n*, если множество* $\{T_n x_0 : n \in \Lambda\}$ *всюду плотно в* Y*, т.е. для любого открытого множества* $V \subset Y$ *существует* $n_0 \in N$ *такое,* *что* $T_{n_0}(x_0) \in V$*, или, используя понятие метрики, для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $y \in Y$ *существует последовательность* $n_k \subset \Lambda$ *такая, что* $\rho_Y\big(T_{n_k}(x_0), y\big) < \varepsilon$ *при* $k > k_0$.

Определение 2 (Топологическая транзитивность). *Пусть* $\mathrm{T}_n\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$*- непрерывное отображение между метрическими пространствами* X *и* Y. *Тогда* T_n *называется топологически транзитивным, если для любых непустых, открытых множеств* $U \subset \mathrm{X}$ *и* $V \subset \mathrm{Y}$ *существует некоторое число* $n \geq 0$ *такое, что*

$$\mathrm{T}_n(U) \cap V \neq \emptyset,$$

т.е. для любых $\varepsilon > 0$, $x \in X$ *и* $y \in Y$ *существуют* $x_0 \in X$ *и* $n \subset N$ *такие, что* $\rho\,(x, x_0) < \varepsilon$ и $\rho\,(n(x_0), y) < \varepsilon$.

Связь между существованием универсального элемента и топологической транзитивностью показывает следующее утверждение (см. [1]):

Теорема (Принцип универсальности**).** *Пусть* X*- полное метрическое прост-ранство,* Y*- сепарабельное метрическое пространство, а* $T_n\colon X \to Y$, $n \in N_0$ *- неко-торая последовательность непрерывных отображений. Тогда следующие утверж-дения эквивалентны:*

(i) T_n *топологически транзитивно для* (X, Y).

(ii) *Существует плотное множество элементов* $x \in X$*, каждое из которых универсально в* Y.

Если одно из этих утверждений выполняется, то множество универсальных точек U *является плотным* G_δ *подмножеством* X.

Теперь напомним определение Кристенсона-Леви [2,3]. Пусть $a \geq 2$ - фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi}{a}i}$.

Определение 3. *Возьмем*

$$\varphi_0^{(a)}(x) = {\omega_a}^k\,, x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right), k = 0,1,\dots,a-1$$

и для $n \geq 0$ *положим*

$$\varphi_n^{(a)}(x+1) = \varphi_n^{(a)}(x) = \varphi_n^{(a)}(a^n x)\,.$$

Тогда обобщенная система Кристенсона-Леви порядка a определяется следующим образом:

Определение 4. *Положим* $\psi_0^{(a)}(x) = 1$.

Если

$$n = \beta_1 a^{n_1} + \cdots + \beta_s a^{n_s}\ , n_1 > n_2 > \cdots > n_s\ , s = 1,2, \dots ,$$

где $0 \le \beta_j < a$, *j*= $1,2, \dots , s$, *то*

$$\psi_n^{(a)}(x) = \left(\varphi_{n_1}^{(a)}(x)\right)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \left(\varphi_{n_s}^{(a)}(x)\right)^{\beta_s}.$$

Система Ψ_a есть система Кристенсона-Леви порядка a. Отметим, что Ψ_2 является классической системой Уолша, а система Ψ_a - частным случаем системы Виленкина.

Замечание. Система Кристенсона-Леви Ψ_a, $a \ge 2$ является полной ортонормированной системой в $L^2[0, 1)$ и базисом в $\mathrm{L^p}[0, 1)$, $\mathrm{p} > 1$ (см. [4]).

Основные свойства системы Ψ_a получены Г. Кристенсоном, Р. Пели, Ж. Файном, К. Ватари, Н. Виленкиным и другими математиками (см. [2,3,5-9]).

Далее, для функции $f \in L^p[0, 1), p \ge 1$ определим частичную сумму ряда Фурье по системе Ψ_a следующим образом:

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_k(f) \cdot \psi_n^{(a)}(x)\ , \text{где } \mathrm{C}_k(f) = \int_0^1 f(x) \cdot \psi_n^{(a)}(x)\ dx, k \ge 0\ .$$

Пусть $E \subset [0, 1)$ - счетное множество, а $\Lambda \subset \mathrm{N}$ - множество индексов. Обозначим через C^E множество всех функций $h(x)$, определенных на E и принимающих комплексные значения, т.е. $h(x_k) = y_k \in C$, $k = 1,2, \dots$,.

Определение 5. *Пусть* $E \subset [0, 1)$- *счетное множество. Для множества индексов* $\Lambda \subset N$ *и некоторой функции* $f \in L^p[0, 1)$ *скажем, что множество* $\{S_n(f, x)\}_{n\in\Lambda}$ ***поточечно универсально*** *на* E, *если множество* $\{S_n(f, x)_E :\ n \in \Lambda\}$ *плотно в* C^E, *т.е. для любых* $h\colon E \to C$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует* $\{n_k\} \in \Lambda$ *такое, что* $\left|S_{n_k}(f, x) - h(x)\right| < \varepsilon$ *при* $\forall\ x \in E$.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема. Пусть $E \subset [0,1)$ - *любое счетное множество.*

а) Существует плотное G_δ *множество* $M \subset L^p[0, 1)$, *обладающее следующим свойством: последовательность частичных сумм ряда Фурье по системе* Ψ_a *любой функции из* M *является поточечно универсальной в* C^E.

б) Система Кристенсона-Леви порядка a *является топологически транзитивной для пары* $\{L^p[0, 1), C^E\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Grosse-Erdmann K.-G., Bayart F., Nestoridis V., Papadimitropoulos C.** Abstract theory of universal series and applications// Proc. London Math. Soc. -2008.- 96.-P. 417 - 463.
2. **Chrestenson H.E.** A class of generalized Walsh functions// Pacific Journal Mathematics. -1955.- 45. - P. 17 – 31.
3. **Levy P.** Sur une generalisation des fonotions orthogonales de Rademacher// Comment. math. helv. - 1944.- 16.- P. 146-152.
4. **Episkoposian S.A.** Uniformly convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system// Siberian Mathematical Journal.- 2013.- 54(5).- P. 810-816.
5. **Paley R.** A remarkable system of orthogonal functions// Proc. London Math. Soc. - 1932. - 34. - P. 241-279.
6. **Fine J.** The generalized Walsh-functions// Trans. AMS. - 1950.- 69.- P. 66 – 67.
7. **Watari C.** On generalized Walsh-Fourier series// Toh. Math. J. - 1958.-10.- P.211–241.
8. **Виленкин Н.Я.** Об одном классе полных ортогональных систем// Известия АН СССР. Сер. мат.- 1947.- 11.- С. 363 – 400.
9. **Young W.** Mean convergence of generalized Walsh - Fourier series// Trans.Amer. Math. Soc.- 1976. - 218.- P. 311-320.

Տ.Մ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

ՖՈՒՐՅԵ - ԿՐԻՍՏԵՆՍՈՆ - ԼԵՎԻԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՏՈՊՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՏՐԱՆԶԻՏԻՎՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում են L^p, $p \geq 1$ դասի ֆունկցիաների Կրիստենսոն - Լևիի համակար-գով Ֆուրյեի շարքերի մասնակի գումարների տոպոլոգիական տրանզիտիվության և կե-տային ունիվերսալության հարցերը:

Առանցքային բառեր. Կրիստենսոն-Լևիի համակարգ, կետային ունիվերսալություն, տոպոլոգիական տրանզիտիվություն:

T.M. SAGHATELYAN

THE TOPOLOGICAL TRANSITIVITY OF PARTIAL SUMS OF THE FOURIER - CHRESTENSON - LEVY SERIES

The problems of pointwise universality, as well as topological transitivity of the partial sums of the Fourier series of functions of the class L^p, $p \geq 1$ by the Chrestenson - Levy system are considered.

***Keywords*:** Chrestenson - Levy system, pointwise universality, topological transitivity.