

С.О. АБЕЛЯН

**ДЕФЕКТНЫЕ ЧИСЛА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА**

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для правильно эллиптического уравнения шестого порядка. При некотором расположении корней характеристического уравнения получена новая формула для определения дефектных чисел. Условия разрешимости и решения однородной задачи определяются в явном виде.

Ключевые слова: задача Дирихле, дефектные числа, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, правильно эллиптическое уравнение.

Пусть $D = \{z = x + iy : |z| = r < 1\}$, а $\Gamma = \partial D$. В области D рассмотрим правильно эллиптическое уравнение шестого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z}\right)^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) u = 0. \quad (1)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ – операторы комплексного дифференцирования; μ, ν_1, ν_2, ν_3 – постоянные числа, такие, что $\mu \neq 0$, $|\mu| < 1$, $|\nu_j| < 1$, $\nu_k \neq \nu_j$, $k, j = 1, 2, 3$. Предполагается, что искомое решение u шесть раз непрерывно дифференцируемо в D и вместе с производными до второго порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е. $u \in C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$. Для уравнения (1) рассматриваем задачу Дирихле в классической постановке. На границе $\Gamma = \partial D$ неизвестная функция u удовлетворяет условиям Дирихле:

$$u|_{\Gamma} = f_0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_{\Gamma} = f_1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}|_{\Gamma} = f_2. \quad (2)$$

Здесь заданные функции f_j принадлежат классу $C^{(2-j,\alpha)}(\Gamma)$. В [1] было доказано, что условия (2) эквивалентны условиям

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^k \partial \bar{z}^{2-k}} \right|_{\Gamma} = F_k(\theta), \quad z = e^{i\theta}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (3)$$

$$u(1, 0) = f_0(1, 0), \quad u_r = f_1(1, 0), \quad u_\theta = f_{0\theta}(1, 0),$$

где $\frac{\partial}{\partial \theta}$ – производная по аргументу комплексного числа ($z = re^{i\theta}$);

$F_k \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ – заданные функции, однозначно определяемые по функциям f_0, f_1, f_2 .

Итак, рассмотрим задачу (1),(3). Как известно (см. [2,3]), задача (1),(3) фредгольмова. Целью работы является определение дефектных чисел этой задачи, т.е. количество линейно независимых решений однородной задачи Дирихле и количество линейно независимых условий на граничные функции, необходимых и достаточных для разрешимости неоднородной задачи Дирихле. Случай двукратных корней для уравнения типа (1) четвертого порядка был рассмотрен в [4]. Случай уравнения шестого порядка при других расположениях корней характеристического уравнения был рассмотрен в [5].

Доказывается следующая теорема.

Теорема. Обозначим $\sigma_j = \mu \nu_j, j = 1, 2, 3$. Тогда при условии

$$T_l(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv \det \sum_{p=0}^{l-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^p & \sigma_2^p & \sigma_3^p \\ p\sigma_1^p & p\sigma_2^p & p\sigma_3^p \\ p^2\sigma_1^p & p^2\sigma_2^p & p^2\sigma_3^p \end{pmatrix} \neq 0, \quad l = 4, 5, \dots \quad (4)$$

задача (1),(3) однозначно разрешима. Если при некотором q условие (4) нарушается, т.е. $T_q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, то однородная задача (1),(3) имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $q + 2$. А чтобы неоднородная задача имела решение, необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли одному условию ортогональности. Таким образом, дефектные числа задачи (1),(3) равны количеству номеров q , при которых нарушается условие (4).

Доказательство. В [1] было показано, что общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$u = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial^{j-1}}{\partial \theta^{j-1}} \Phi_j(z + \mu \bar{z}) + \Psi_j(\bar{z} + \nu_j z) \right), \quad (5)$$

где Φ_j и Ψ_j ($j=1,2,3$) - аналитические функции в областях $D(\mu) = \{z + \mu \bar{z} | z \in D\}$, $G(\nu_j) = \{\bar{z} + \nu_j z | z \in D\}$ соответственно, которые необходимо определить. Подставим функцию (5) в граничные равенства (3). Используя операторное тождество [1]

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m} \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + (k-m)iI \right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m},$$

при $k=0,1,2$ получим

$$\sum_{j=1}^3 \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + (2k-2)iI \right)^{j-1} \Phi_j''(z + \mu \bar{z}) \mu^{2-k} + \Psi_j''(\bar{z} + \nu_j z) \nu_j^k \right) = F_k(\theta). \quad (6)$$

Представим Φ_j'' и Ψ_j'' на окружности Γ , используя разложение, полученное в [2]:

$$\begin{aligned} \Phi_j''(z + \mu \bar{z}) &= \varphi_j(z) + \varphi_j(\mu \bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} \mu^k z^{-k}, \\ \Psi_j''(\bar{z} + \nu_j z) &= \psi_j(\bar{z}) + \psi_j(\nu_j z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk} \nu_j^k z^k, \quad j=1,2,3. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как подлежащие определению функции φ_j и ψ_j аналитичны в круге D , то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{jk} и B_{jk} . Разложим функции F_k ($k=0,1,2$) на окружности Γ в ряд Фурье:

$$F_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{kj} z^k, \quad j=0,1,2. \quad (8)$$

Для определения коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk} подставим (5) и (7) в граничные условия (3).

При $k = 0, 1, 2$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left((A_{jl} (il + (2k-2)i)^{j-1} \mu^{2-k} + B_{jl} \nu_j^{l+k}) z^l + (A_{jl} (-il + (2k-2)i)^{j-1} \mu^{l+2-k} + B_{jl} \nu_j^k) z^{-l} \right) = \\ & = \sum_{l=1}^{\infty} (d_{lk} z^l + d_{-lk} z^{-l}) + d_{0k}. \end{aligned}$$

Пусть $l \geq 4$. Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях z^l и z^{-l} , получим систему

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (A_{jl} (il + (2k-2)i)^{j-1} \mu^{2-k} + B_{jl} \nu_j^{l+k}) &= d_{lk}, \quad k = 2, 1, 0, \\ \sum_{j=1}^3 (A_{jl} (-il + (2k-2)i)^{j-1} \mu^{l+2-k} + B_{jl} \nu_j^k) &= d_{-lk}, \quad k = 2, 1, 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Определитель основной матрицы этой системы имеет следующий вид:

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} 1 & il + 2i & (il + 2i)^2 & \nu_1^{l+2} & \nu_2^{l+2} & \nu_3^{l+2} \\ \mu & \mu il & \mu (il)^2 & \nu_1^{l+1} & \nu_2^{l+1} & \nu_3^{l+1} \\ \mu^2 & \mu^2 (il - 2i) & \mu^2 (il - 2i)^2 & \nu_1^l & \nu_2^l & \nu_3^l \\ \mu^l & \mu^l (-il + 2i) & \mu^l (-il + 2i)^2 & \nu_1^2 & \nu_2^2 & \nu_3^2 \\ \mu^{l+1} & \mu^{l+1} (-il) & \mu^{l+1} (-il)^2 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \mu^{l+2} & \mu^{l+2} (-il - 2i) & \mu^{l+2} (-il - 2i)^2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Из каждой строки детерминанта (10) вынесем различные степени μ так, чтобы все элементы первого столбца были равны единице. Умножив последние три столбца на μ^{l+2} , получим

$$\Delta_l = i \begin{vmatrix} 1 & l+2 & (l+2)^2 & \sigma_1^{l+2} & \sigma_2^{l+2} & \sigma_3^{l+2} \\ 1 & l & l^2 & \sigma_1^{l+1} & \sigma_2^{l+1} & \sigma_3^{l+1} \\ 1 & l-2 & (l-2)^2 & \sigma_1^l & \sigma_2^l & \sigma_3^l \\ 1 & -l+2 & (-l+2)^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & -l & l^2 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & -l-2 & (-l-2)^2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Выполняя преобразования по столбцам, получим

$$\Delta_l = -8(\sigma_1 - 1)^3(\sigma_2 - 1)^3(\sigma_3 - 1)^3 T_l(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (12)$$

Предположим, что условия (4) теоремы выполнены. Тогда из (12) $\Delta_l \neq 0$. В этом случае из системы (9) однозначно определяем коэффициенты $A_{jl} (j = 1, 2, 3)$ и $A_{ml} (m = 1, 2, 3)$ при $l = 4, 5, \dots$. При $l = 3$ эти коэффициенты также определяются однозначно, поскольку Δ_3 отлично от нуля, так как является обобщенным определителем Вандермонда с различными элементами. Таким образом, получаем, что при условиях (4) коэффициенты в разложениях (7) при $l \geq 3$ определяются однозначно. Для $l = 0, 1, 2$ соответствующие коэффициенты могут быть найдены для произвольных граничных функций, но не однозначно. Следовательно, в этом случае решение неоднородной задачи (1), (3) существует, а решение соответствующей однородной задачи является многочленом порядка не более четырёх. Однако из однородных условий (2) следует, что ненулевое решение однородной задачи (1),(3) должно делиться на $(1 - z\bar{z})^3$ (см. [6], стр.84), т.е. является многочленом порядка не менее шести. Поэтому задача (1),(3) однозначно разрешима. Первая часть теоремы доказана. Предположим, что условие (4) нарушается при некотором q . В этом случае ранг основной матрицы системы (9) равен четырём, и, следовательно, соответствующая однородная система имеет одно линейно независимое решение A_{jq}, B_{jq} . Для того чтобы соответствующая неоднородная система имела решение, необходимо одно линейно независимое условие на граничные функции f_k .

Например, если $\sigma_1 = \frac{1}{3}, \sigma_2 = \frac{1}{9}, \sigma_3 = \frac{1}{204}(47 - 3\sqrt{2905})$, то $T_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$.

В этом случае $(1 - z\bar{z})^3$ будет нетривиальным решением однородной задачи (1),(3), а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо одно условие. Таким образом, дефектные числа задачи (1), (3) равны количеству номеров q , при которых нарушается условие (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабаян А.О.** О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге// Известия НАН Армении. Математика□-2003□- 38, №6□- С.39-48.
2. **Tovmasyan N.E.** Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. - Singapore, London, Hong-Kong: World Scientific Publishing Co. Ltd., 1998.-236p.
3. **Lions J.-L., Magenes E.** Problèmes aux limites non homogènes et applications. V.I. Dunod.- Paris, 1968.-372p.
4. **Бабаян А.О.** Задача Дирихле для уравнения в частных производных четвертого порядка в случае двукратных корней характеристического уравнения// Mathematica Montisnigri.-2015.- V.3.2.- P.66-80.
5. **Бабаян А.О., Абелян С.О.** О задаче Дирихле для одного правильно эллиптического уравнения шестого порядка в единичном круге // Вестник НПУА: Сборник научных статей. – Ереван.-Часть 1.- С.14-18
6. **Axler S., Bourdon P., Ramey W.** Harmonic Function Theory.- Springer-Verlag, Inc, New-York, 2001.- 260p.

Ս.Հ. ԱԲԵԼՅԱՆ

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆՂԻՐԻ ԴԵՖԵԿՏԻՎ ՔՎԵՐԸ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՄԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը միավոր շրջանում վեցերորդ կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար: Բնութագրիչ հավասարման մի քանի արմատների դասավորվածությունից ստացվել է նոր բանաձև՝ դեֆեկտային թվերը որոշելու համար: Համասեռ խնդրի լուծումը և լուծելիության պայմանները որոշվում են արդյունավետ:

Առանցքային բառեր. Դիրիխլեի խնդիրը, դեֆեկտային թվեր, Դիրիխլեի համասեռ խնդրի ոչ հայտնի լուծումները, ճշգրիտ էլիպսական հավասարում:

S.H. ABELYAN

DEFECTIVE NUMBERS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR ONE EQUATION IN THE SIXTH ORDER PARTIAL DERIVATIVES

The Dirichlet problem in a unit disc for a sixth order properly elliptic equation is considered. At a certain arrangement of the roots of the characteristic equation, a new formula is obtained for determining the defective numbers. The conditions for the solvability and solution of the homogeneous problem are determined in an explicit form.

Keywords: Dirichlet problem, defective numbers, nontrivial solutions of homogeneous Dirichlet problem, a properly elliptic equation.