S.H. SIMONYAN, G.V. ADAMYAN, A.V. MELIKYAN

METHODS OF SOLVING ONE-PARAMETRIC CUBIC MATRIX EQUATIONS (III)

Analytical, direct and decomposition numerical-analytical methods for solving one-parameter cubic matrix equations are proposed. The latter are based on differential transformations of G.Ye. Pukhov.

Keywords: one-parametric cubic matrix equations, analytical method of solution, differential transformations, direct method of solution, decomposition method of solution, information technologies.

УДК 62.317

С.О. СИМОНЯН, Г.В. АДАМЯН, А.В. МЕЛИКЯН

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КУБИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ (IV)

Предложены аналитический, а также прямой и декомпозиционный численно-аналитические методы решения однопараметрических кубических матричных уравнений. Последние основаны на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова.

Ключевые слова: однопараметрические кубические матричные уравнения, аналитический метод решения, дифференциальные преобразования, прямой метод решения, декомпозиционный метод решения, информационные технологии.

Рассматривается однопараметрическое кубическое матричное уравнение

$$A_0(t) \cdot X^3(t) + A_1(t) \cdot X^2(t) + A_2(t) \cdot X(t) + A_3(t) = [0] \tag{1}$$

(см. аналогичную работу в настоящем сборнике), которое редуцируется в матричную систему второго порядка

$$\begin{cases} A_0(t) \cdot Y(t) + A_1(t) \cdot X^2(t) + A_2(t) \cdot X(t) + A_3(t) = [0], \\ X^3(t) - Y(t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

с дополнительной неизвестной матрицей $Y(t)$ порядка m, также подлежащей определению.

1. <u>Прямой подход.</u> Далее система (1) представляется в виде матрично-векторно-блочной системы

$$\left[\begin{array}{c:c} A_1(t)\cdot X(t)+A_2(t) & A_0(t) \\ \hdashline X^2(t) & -E \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} X(t) \\ \hdashline Y(t) \end{array}\right]=-\left[\begin{array}{c} A_3(t) \\ \hdashline 0 \end{array}\right], \tag{3}$$

также служащей основой для разработки последовательного и параллельного численно-аналитических методов, основанных на дифференциальных преобразованиях [1]. При этом и здесь оперируем подходом, предложенным, в частности, в работе [2].

Последовательный численно-аналитический метод использует рекуррентные численные процедуры, порождаемые системой (3), в соответствии со спектральной моделью

$$\left[\begin{array}{c:c} A_1(0)\cdot X(0)+A_2(0) & A_0(0) \\ \hdashline X^2(0) & -E \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} X(K) \\ \hdashline Y(K) \end{array}\right]+$$

$$+\left[\begin{array}{c:c} A_1(0)\cdot X(1)+A_1(1)\cdot X(0)+A_2(1) & A_0(1) \\ \hdashline X(0)\cdot X(1)+X(1)\cdot X(0) & 0 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} X(K-1) \\ \hdashline Y(K-1) \end{array}\right]+\cdots+$$

$$+\left[\begin{array}{c:c} A_1(0)\cdot X(K-1)+A_1(1)\cdot X(K-2)+\cdots+A_1(K-1)\cdot X(0)+A_2(K-1) & A_0(K-1) \\ \hdashline X(K-1)\cdot X(0)+X(K-2)\cdot X(1)+\cdots+X(1)\cdot X(K-2)+X(0)\cdot X(K-1) & 0 \end{array}\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c} X(1) \\ \hdashline Y(1) \end{array}\right]+\left[\begin{array}{c:c} A_1(0)\cdot X(K)+A_1(1)\cdot X(K-1)+\cdots+A_1(K-1)\cdot X(1)+A_2(K) & A_0(K) \\ \hdashline X(K)\cdot X(0)+X(K-1)\cdot X(1)+\cdots+X(1)\cdot X(K-1)+X(0)\cdot X(K) & 0 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} X(0) \\ \hdashline Y(0) \end{array}\right]=$$

$$=-\left[\begin{array}{c} A_3(K) \\ \hdashline 0 \end{array}\right],\ K=\overline{0,\infty}, \tag{4}$$

откуда

$$\left[\begin{array}{c} X(0) \\ \hdashline Y(0) \end{array}\right]_{(q+1)}=-D^{-1}(0,0)_{(q)}\cdot\left[\begin{array}{c} A_3(0) \\ \hdashline 0 \end{array}\right],\ K=0, \tag{5а}$$

$$\left[\begin{array}{c} X(K) \\ \hdashline Y(K) \end{array}\right]_{(q+1)}=-D^{-1}(0,0)\cdot\left[\left[\begin{array}{c} A_3(K) \\ \hdashline 0 \end{array}\right]+\right.$$

$$+\sum_{l=1}^{K-1}\left[D(l,0;l-1,1;\cdots;1,l-1;0,l)\right]\cdot\left[\begin{array}{c} X(K-l) \\ \hdashline Y(K-l) \end{array}\right]\Bigg]+$$

$$+D(K,0;\cdots;0,K)_{(q)}\cdot\left[\begin{array}{c} X(0) \\ \hdashline Y(0) \end{array}\right]\ ,\ K=\overline{1,\infty} \tag{5б}$$

(где q - номер итераций), если, конечно, имеет место условие регулярности (условие разрешимости задачи):

$rangD(0,0)=2m.$ (6)

Параллельный численно-аналитический метод использует поточные численные процедуры на основе организации вычислительных схем, базирующихся на последовательных рекуррентных матричных соотношениях, порождаемых спектральной моделью (4).

2. <u>Декомпозиционный подход.</u> Учитывая, что

$$\begin{cases} A_0(t)=B_0(t)+j\cdot C_0(t), \\ A_1(t)=B_1(t)+j\cdot C_1(t), \\ A_2(t)=B_2(t)+j\cdot C_2(t), \\ A_3(t)=B_3(t)+j\cdot C_3(t), \\ X(t)=M(t)+j\cdot N(t), \\ Y(t)=P(t)+j\cdot Q(t), \end{cases} \tag{7}$$

далее матрично-векторно-блочная система (3) представляется в виде следующей гиперматрично-гипервекторно-блочной системы:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} U(t) & -V(t) & B_0(t) & -C_0(t) \\ V(t) & U(t) & C_0(t) & B_0(t) \\ \hline M(t) & -S(t) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$-E$}} \\ S(t) & R(t) & & \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} M(t) \\ N(t) \\ \hline P(t) \\ Q(t) \end{array}\right]=-\left[\begin{array}{c} B_3(t) \\ C_3(t) \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right], \tag{8}$$

где

$$\begin{cases} U(t)=B_1(t)\cdot M(t)-C_1(t)\cdot N(t)+B_2(t), \\ V(t)=B_1(t)\cdot N(t)-C_1(t)\cdot M(t)+C_2(t), \\ R(t)=M^2(t)-N^2(t), \\ S(t)=M(t)\cdot N(t)+N(t)\cdot M(t). \end{cases} \tag{9}$$

Представление (8), (9) служит основой для разработки последовательного и параллельного численно-аналитических методов, также основанных на дифференциальных преобразованиях.

Последовательный численно-аналитический метод использует рекуррентные численные процедуры в соответствии со спектральной моделью

$$\left[\begin{array}{cc|cc} U(0) & -V(0) & B_0(0) & -C_0(0) \\ V(0) & U(0) & C_0(0) & B_0(0) \\ \hline R(0) & -S(0) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$-E$}} \\ S(0) & R(0) & & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} M(K) \\ N(K) \\ \hline P(K) \\ Q(K) \end{array}\right] +$$

$$+\left[\begin{array}{cc|cc} U(1) & -V(1) & B_0(1) & -C_0(1) \\ V(1) & U(1) & C_0(1) & B_0(1) \\ \hline R(1) & -S(1) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ S(1) & R(1) & & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} M(K-1) \\ N(K-1) \\ \hline P(K-1) \\ Q(K-1) \end{array}\right] + \cdots +$$

$$+\left[\begin{array}{cc|cc} U(K-1) & -V(K-1) & B_0(K-1) & -C_0(K-1) \\ V(K-1) & U(K-1) & C_0(K-1) & B_0(K-1) \\ \hline R(K-1) & -S(K-1) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ S(K-1) & R(K-1) & & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} M(1) \\ N(1) \\ \hline P(1) \\ Q(1) \end{array}\right] +$$

$$+\left[\begin{array}{cc|cc} U(K) & -V(K) & B_0(K) & -C_0(K) \\ V(K) & U(K) & C_0(K) & B_0(K) \\ \hline R(K) & -S(K) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ S(K) & R(K) & & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} M(0) \\ N(0) \\ \hline P(0) \\ Q(0) \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{c} B_3(K) \\ C_3(K) \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right], \qquad (10)$$

где

$$\begin{cases} U(l) = \sum\limits_{l=0}^{K} B_1(l) \cdot M(K-l) - \sum\limits_{l=0}^{K} C_1(l) \cdot N(K-l) + B_2(l), \\ V(l) = \sum\limits_{l=0}^{K} B_1(l) \cdot N(K-l) - \sum\limits_{l=0}^{K} C_1(l) \cdot M(K-l) + C_2(l), \\ R(l) = \sum\limits_{l=0}^{K} M(l) \cdot M(K-l) - \sum\limits_{l=0}^{K} N(l) \cdot N(K-l), \\ S(l) = \sum\limits_{l=0}^{K} M(l) \cdot N(K-l) - \sum\limits_{l=0}^{K} N(l) \cdot M(K-l), \end{cases} \quad l = \overline{0, K}. \qquad (11)$$

Далее из (10) имеем

$$\left[\begin{array}{c} M(0) \\ N(0) \\ \hline P(0) \\ Q(0) \end{array}\right]_{(q+1)} = -D^{-1}(0,0)_{(q)} \cdot \left[\begin{array}{c} B_3(0) \\ C_3(0) \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right], \quad K = 0, \qquad (12a)$$

$$\begin{bmatrix} M(K) \\ N(K) \\ \hdashline P(K) \\ Q(K) \end{bmatrix}_{(q+1)} = -D^{-1}(0,0)\cdot\left[\begin{bmatrix} B_3(K) \\ C_3(K) \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\right.$$

$$+\sum_{l=1}^{K-1}\left[\begin{array}{cc:cc} U(l) & -V(l) & B_0(l) & -C_0(l) \\ V(l) & U(l) & C_0(l) & B_0(l) \\ \hdashline M(l) & -N(l) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ N(l) & M(l) & & \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} M(K-l) \\ N(K-l) \\ \hdashline P(K-l) \\ Q(K-l) \end{bmatrix}+$$

$$\left.+\left[\begin{array}{cc:cc} U(K) & -V(K) & B_0(K) & -C_0(K) \\ V(K) & U(K) & C_0(K) & B_0(K) \\ \hdashline R(K) & -S(K) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ S(K) & R(K) & & \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} M(0) \\ N(0) \\ \hdashline P(0) \\ Q(0) \end{bmatrix}\right]_{(q)}, \ K=\overline{1,\infty} \qquad (12б)$$

(где q - номер итераций), если, конечно, имеет место условие гиперрегулярности (условие разрешимости задачи):

$$rangD(0,0) = 4m. \qquad (13)$$

Параллельный численно-аналитический метод использует поточные численные процедуры, базирующиеся на последовательных рекуррентных матричных соотношениях, порождаемых спектральной моделью (10), (11).

Заключение. Таким образом, каким-то методом определив матричные дискреты $X(0)$, $X(1)$, $\cdots, X(K)$, в соответствии с некоторым обратным дифференциальным преобразованием [1] можно восстановить соответствующее решение задачи (1). Естественно, для практической реализации предложенных методов и здесь широко могут быть использованы современные средства информационных технологий [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
2. **Симонян С.О.** Метод решения однопараметрических обобщенных квадратных матричных уравнений // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. - 2016. – N2. – С. 12-23.

3. **Straustrup B.** The C^{++} Programming Language. - 4^{th} Edition. - Boston: Addison – Wesleg professional, 2013. – 1368 p.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Գ.Վ. ԱԴԱՄՅԱՆ, Ա.Վ. ՄԵԼԻՔՅԱՆ

ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԽՈՐԱՆԱՐԴ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ (IV)

Առաջարկվել են միապարամետրական խորանարդ մատրիցային հավասարումների լուծման անալիտիկ, ինչպես նաև ուղղակի և դեկոմպոզիցիոն թվա-անալիտիկ մեթոդներ: Վերջիններս հիմնված են Գ. Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա:

Առանցքային բառեր. միապարամետրական խորանարդ մատրիցային հավասարումներ, լուծման անալիտիկ մեթոդ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, լուծման ուղղակի մեթոդ, լուծման դեկոմպոզիցիոն մեթոդ, ինֆորմացիոն տեխնոլոգիաներ:

S.H. SIMONYAN, G.V. ADAMYAN, A.V. MELIKYAN

METHODS OF SOLVING ONE-PARAMETRIC CUBIC MATRIX EQUATIONS (IV)

Analytical, direct and decomposition numerical-analytical methods for solving one-parameter cubic matrix equations are proposed. The latter are based on differential transformations of G.Ye. Pukhov.

Keywords: one-parametric cubic matrix equations, analytical method of solution, differential transformations, direct method of solution, decomposition method of solution, information technologies.