

УДК 621.865

О.Н. ГАСПАРЯН, Г.Г. ЕГИАЗАРЯН, А.Г. ДАРБИНЯН, Л.М. БУНИАТЯН
РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ С
РАЗВЯЗЫВАЮЩИМ РЕГУЛЯТОРОМ

Рассмотрены вопросы разработки математической модели системы управления квадрокоптером с учетом динамики бесщеточных электродвигателей постоянного тока. Показано, что введение в систему матричного развязывающего регулятора позволяет исключить жесткие взаимные связи между каналами управления и свести проектирование системы управления к проектированию отдельных каналов на основе методов классической теории регулирования. Приведен численный пример расчета.

Ключевые слова: кинематика квадрокоптера, взаимные связи, многомерная система управления, внешние возмущения, развязывающий регулятор.

Введение. Вопросам разработки математических моделей квадрокоптеров посвящено большое количество научно-технических публикаций [1, 2]. При этом обычно предполагается, что бесщеточные электродвигатели (моторы) постоянного тока описываются безынерционными уравнениями.

В настоящей статье рассмотрены вопросы разработки уточненной математической модели квадрокоптера с учетом электромеханической постоянной времени электродвигателей, а также предложен подход к проектированию системы управления квадрокоптером с позиций теории многосвязного регулирования. Указанный подход состоит во введении в систему развязывающего матричного регулятора [3], который компенсирует взаимные связи между каналами и сводит проектирование системы управления к проектированию отдельных каналов на основе методов и подходов классической теории регулирования [4].

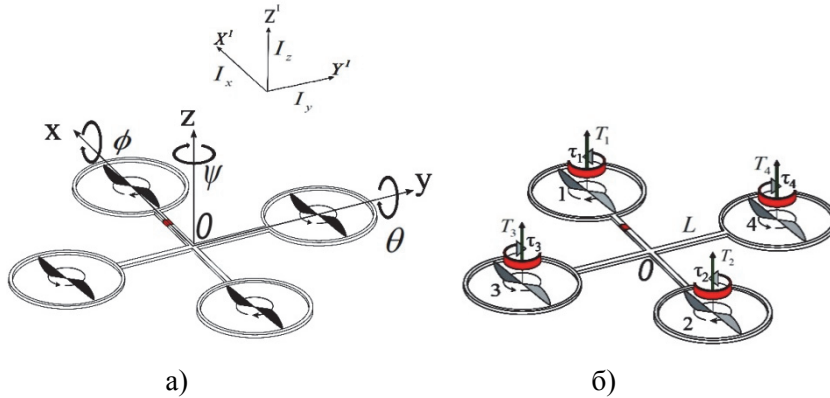


Рис. Схематическое изображение квадрокоптера:

а - системы координат, б - расположение моторов

1. Динамика квадрокоптера. Схематическое изображение квадрокоптера дано на рисунке, где через $O'X'Y'Z'$ обозначена инерциальная система координат (СК), относительно которой будет описываться движение центра масс (ЦМ) квадрокоптера, а через $OXYZ$ - жестко связанная с квадрокоптером СК с началом в ЦМ и осями, направленными вдоль главных моментов инерции.

Обозначим через m массу квадрокоптера, через x, y, z - его координаты относительно инерциальной СК; через I_x, I_y, I_z - моменты инерции относительно осей OX, OY и OZ , а через θ, ϕ , и ψ - углы тангажа, крена и рыскания [1,2]. Далее обозначим через J_T одинаковые моменты инерции ротора каждого мотора, а через $\Omega = -\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$ - суммарную скорость вращения пропеллеров, где Ω_i - скорость i -го пропеллера. Тогда, если считать угловые скорости квадрокоптера и углы тангажа θ и крена ϕ малыми, а также принять, что в условиях прямолинейного движения угол рыскания равен нулю ($\psi = 0$) и в направлениях осей OX' и OY' приблизительно выполняется условие $u_z \approx mg$, то это приводит к следующим упрощенным линейным уравнениям поступательного движения ЦМ в инерциальной СК и углового движения квадрокоптера относительно ЦМ в связанной СК [1,2]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg\theta + \gamma_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg\phi + \gamma_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = u_z - mg + \gamma_z, \quad (1)$$

$$I_x \frac{d^2\theta}{dt^2} = u_\theta + \gamma_\theta, \quad I_y \frac{d^2\phi}{dt^2} = u_\phi + \gamma_\phi, \quad I_z \frac{d^2\psi}{dt^2} = u_\psi + \gamma_\psi, \quad (2)$$

где u_z - подъемная сила вдоль оси вертикальной оси $O^I Z^I$; g - гравитационная постоянная; u_θ , u_ϕ , u_ψ - управляющие моменты вокруг главных осей инерции квадрокоптеров, а γ_x , γ_y , γ_z и γ_θ , γ_ϕ , γ_ψ - внешние возмущающие силы и моменты.

В настоящее время в квадрокоптерах обычно используются бесщеточные моторы с внешним ротором [1]. Если пренебречь индуктивностью якоря электродвигателя, то создаваемая каждым i -м мотором тяга T_i связана с входным напряжением u_i дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dT_i}{dt} = -\omega_M T_i + K_M \omega_M u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3)$$

где постоянные коэффициенты K_M и ω_M являются конструктивными параметрами.

2. Кинематика квадрокоптера. Моторы с пропеллерами установлены на квадрокоптере так, что задний и передний моторы вращаются по часовой стрелке, а левый и правый - против часовой стрелки (рис. б). Каждый i -й мотор расположен на расстоянии L от центра масс O и при вращении производит крутящий момент τ_i . Создаваемая i -ым пропеллером тяга T_i направлена вдоль оси OZ . Тяги T_i и моменты τ_i приводят к подъемной силе u_z вдоль оси OZ и управляющим моментам u_θ , u_ϕ и u_ψ по осям OX , OY и OZ , которые определяются следующим образом:

$$u_z = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad u_\theta = L(T_1 - T_2), \quad u_\phi = L(T_3 - T_4), \quad u_\psi = \tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4. \quad (4)$$

Момент τ_i i -го мотора непосредственно связан с тягой T_i соотношением $\tau_i = K_\psi T_i$, где $K_\psi = const$ [1]. С учетом (4) уравнения (1) и (2) запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\theta + \frac{1}{m}\gamma_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g\phi + \frac{1}{m}\gamma_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{m}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) - g + \frac{1}{m}\gamma_z, \quad (5)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{L}{I_x}(T_1 - T_2) + \frac{1}{I_x}\gamma_\theta, \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{L}{I_y}(T_3 - T_4) + \frac{1}{I_y}\gamma_\phi, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{K_\psi}{I_z}(T_1 + T_2 - T_3 - T_4) + \frac{1}{I_z}\gamma_\psi, \quad (6)$$

что дает совместно с уравнением (3) полную систему динамических уравнений квадрокоптера с учетом динамики моторов.

В качестве четырех управляемых параметров движения квадрокоптера обычно выбираются углы θ , ϕ , ψ и высота z [1]. В соответствии с первыми двумя уравнениями в системе уравнений (5) управление перемещениями x и y при этом осуществляется косвенно, за счет изменения углов крена θ и тангажа ϕ .

3. Описание динамики квадрокоптера в операторной форме. Переходя в линеаризованных уравнениях (3), (5) и (6) к операторной форме записи, получим

$$x = \frac{1}{s^2} \left(g\theta + \frac{1}{m} \gamma_x \right), \quad y = \frac{1}{s^2} \left(-g\phi + \frac{1}{m} \gamma_y \right), \quad (7)$$

$$z = \frac{1}{ms^2} [(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) - mg + \gamma_z], \quad (8)$$

$$\theta = \frac{1}{s^2} \left[\frac{L}{I_x} (T_1 - T_2) + \frac{1}{I_x} \gamma_\theta \right], \quad \phi = \frac{1}{s^2} \left[\frac{L}{I_y} (T_3 - T_4) + \frac{1}{I_y} \gamma_\phi \right], \quad (9)$$

$$\psi = \frac{1}{s^2} \left[\frac{K_\psi}{I_z} (T_1 + T_2 - T_3 - T_4) + \frac{1}{I_z} \gamma_\psi \right],$$

$$T_i = w_M(s) u_i \quad (i=1,2,3,4), \quad w_M(s) = K_M \frac{\omega_M}{s + \omega_M}, \quad (10)$$

где $w_M(s)$ - передаточная функция идентичных моторов. Подставив (10) в (8), (9), найдем следующие выражения, связывающие переменные z , θ , ϕ , ψ с напряжениями u_1 , u_2 , u_3 , u_4 и возмущениями γ_z , γ_θ , γ_ϕ , γ_ψ :

$$z = \left[\frac{1}{ms^2} w_M(s) (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - \frac{1}{s^2} g \right] + \frac{1}{ms^2} \gamma_z, \quad \theta = \frac{L}{I_x s^2} w_M(s) (u_1 - u_2) + \frac{1}{I_x s^2} \gamma_\theta, \quad (11)$$

$$\phi = \frac{L}{I_y s^2} w_M(s) (u_3 - u_4) + \frac{1}{I_y s^2} \gamma_\phi, \quad \psi = \frac{K_\psi}{I_z s^2} w_M(s) (u_1 + u_2 - u_3 - u_4) + \frac{1}{I_z s^2} \gamma_\psi. \quad (12)$$

Если ввести в рассмотрение векторы регулируемых переменных $\bar{\eta} = [z, \theta, \phi, \psi]^T$, управляющих напряжений $\bar{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ и возмущений

$\bar{\gamma} = [\gamma_z, \gamma_\theta, \gamma_\phi, \gamma_\psi]^T$, а также вектор $F = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, то уравнения (11), (12) можно записать в матричной форме

$$\bar{\eta} = W_U(s)R\bar{u} + W_\gamma(s)\bar{\gamma} - \frac{1}{s^2}Fg, \quad (13)$$

где матрицы $W_U(s)$, R и $W_\gamma(s)$ имеют вид

$$W_U(s) = \frac{1}{s^2}W_M(s) \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\psi/I_z \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$W_\gamma(s) = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Таким образом, рассматриваемая система управления квадрокоптером относится к многосвязным системам управления, где взаимные связи между отдельными каналами характеризуются матрицей жестких (т.е. безынерционных) взаимных связей R в (14).

К разработке подобных систем следует подходить с позиций общей теории многосвязного регулирования [4]. Допустим, ставится задача выбора матричного регулятора $W_{\text{Reg}}(s)$, который обеспечит развязку всех четырех каналов взаимосвязанной системы. Если обозначить через $\bar{\eta}_r = [z_r, \theta_r, \phi_r, \psi_r]^T$ вектор входных сигналов, то уравнение разомкнутой системы управления с регулятором $W_{\text{Reg}}(s)$ примет вид

$$\bar{\eta} = W_O(s)\varepsilon + W_\gamma(s)\bar{\gamma} - \frac{1}{s^2}Fg, \quad (16)$$

где $\varepsilon = \bar{\eta}_r - \bar{\eta}$ есть вектор ошибки замкнутой системы, а

$$W_O(s) = W_U(s)RW_{\text{Reg}}(s) \quad (17)$$

- передаточная матрица разомкнутой системы.

Из (17) очевидно, что если выбрать $W_{\text{Reg}}(s)$ из условия

$$W_{\text{Reg}}(s) = R^{-1} \text{diag} \{W_{Ri}(s)\}, \quad (18)$$

где R^{-1} - обратная матрица, а $\text{diag} \{W_{Ri}(s)\}$ - диагональная матрица регуляторов $w_z(s)$, $w_\theta(s)$, $w_\phi(s)$, $w_\psi(s)$ в отдельных каналах, то передаточная матрица $W_o(s)$ (17) примет вид

$$W_o(s) = \frac{1}{s^2} w_M(s) \begin{bmatrix} w_z(s)/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_\theta(s)L/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_\phi(s)L/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_\psi(s)K_\psi/I_z \end{bmatrix}, \quad (19)$$

т.е. станет диагональной. Физически это означает, что отдельные каналы системы оказываются независимыми. В теории многосвязного регулирования регуляторы типа $W_{\text{Reg}}(s)$ (18) называются развязывающими [4].

Выходной сигнал замкнутой системы $\bar{\eta}$ при этом примет вид

$$\bar{\eta} = \Phi(s)\bar{\eta}_r + \Phi_\varepsilon(s)W_\gamma(s)\bar{\gamma} - \Phi_\varepsilon(s)\frac{1}{s^2}Fg, \quad (20)$$

где

$$\Phi(s) = [I + W_o(s)]^{-1}W_o(s), \quad \Phi_\varepsilon(s) = [I + W_o(s)]^{-1} \quad (21)$$

есть передаточные матрицы замкнутой системы по выходу и ошибке, а I - единичная матрица размера 4×4 .

Подставив выражения для $W_o(s)$ (19) и $W_\gamma(s)$ (15) в (20), получим [поскольку все матрицы в (20) являются диагональными] систему следующих четырех уравнений:

$$z = \left\{ \frac{w_z(s)w_M(s)}{[ms^2 + w_z(s)w_M(s)]} z_r - \frac{m}{[ms^2 + w_z(s)w_M(s)]} g \right\} + \frac{1}{[ms^2 + w_z(s)w_M(s)]} \gamma_z, \quad (22)$$

$$\theta = \frac{Lw_M(s)w_\theta(s)}{I_x s^2 + Lw_M(s)w_\theta(s)} \theta_r + \frac{1}{I_x s^2 + Lw_M(s)w_\theta(s)} \gamma_\theta, \quad (23)$$

$$\phi = \frac{Lw_M(s)w_\phi(s)}{I_y s^2 + Lw_M(s)w_\phi(s)} \phi_r + \frac{1}{I_y s^2 + Lw_M(s)w_\phi(s)} \gamma_\phi, \quad (24)$$

$$\psi = \frac{Lw_M(s)w_\psi(s)}{I_z s^2 + Lw_M(s)w_\psi(s)} \psi_r + \frac{1}{I_z s^2 + Lw_M(s)w_\psi(s)} \gamma_\psi, \quad (25)$$

первое из которых характеризует линейное движение квадрокоптера вдоль оси z , а остальные три описывают динамику системы по углам тангажа, крена и рыскания.

Устойчивость замкнутой системы управления квадрокоптером с развязывающим регулятором $W_{\text{reg}}(s)$ (18) при этом определяется распределением корней следующего характеристического уравнения [4]:

$$[I + W_o(s)] = 0, \quad (26)$$

которое с учетом (22)-(25) распадается на следующие четыре уравнения:

$$\begin{aligned} ms^2 + w_z(s)w_M(s) = 0, \quad I_x s^2 + Lw_M(s)w_\theta(s) = 0, \\ I_y s^2 + Lw_M(s)w_\phi(s) = 0, \quad I_z s^2 + Lw_M(s)w_\psi(s) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, проектирование системы управления квадрокоптером с регулятором $W_{\text{reg}}(s)$ (18) сводится к проектированию отдельных каналов, которое может быть осуществлено обычными методами классической теории регулирования.

Заключение. В отличие от рассмотренного в [2] подхода к развязыванию каналов за счет применения динамической обратной связи, предлагаемый в настоящей статье развязывающий регулятор $W_{\text{reg}}(s)$ (18) существенно проще, так как состоит из статической матричной составляющей R^{-1} и диагональной матрицы корректирующих звеньев $w_z(s)$, $w_\theta(s)$, $w_\phi(s)$, $w_\psi(s)$, которые выбираются на основе стандартных методов классической теории регулирования [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lozano R., Castillo P. and DzulA.** Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors // IEEE Control Systems Magazine. - 2005. - P. 45 – 55.
2. **Benallegue V. Mister and M'Sirdi N. K.** Exact linearization and non interacting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback // IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication. - 2001. – P. 586 – 593.

3. **Gasparyan O.N.** Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach. - John Wiley & Sons Ltd., Chichester, Sussex, UK, 2008.
4. **Dorf R.C., Bishop R.** Modern Control Systems. - Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 2007. - 1046p.

**Օ.Ն. ԳԱՍԴԱՐՅԱՆ, Գ.Գ. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ, Հ.Գ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ,
Լ.Մ. ԲՈՒՆԻԱԹՅԱՆ**

**ԿԱՊԱԶԵՐԾՈՂ ԿԱՐԳԱՎՈՐԻՉՈՎ ՔԱՌԱՊՏՈՒՏԱԿԻ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ
ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՄՇԱԿՈՒՄԸ**

Դիտարկված են քառապտուտակի կառավարման համակարգի մաթեմատիկական մոդելի մշակման հարցերը, հաշվի առնելով անխոզանակավոր հաստատուն հոսանքի էլեկտրաշարժիչների դինամիկան: Ցույց է տրված, որ համակարգի մեջ կապազերծող կարգավորիչի ներմուծումը թույլ է տալիս կոմպենսացնել կապուղիների միջև եղած կոշտ փոխադարձ կապերը: Դա հնարավորություն է տալիս կառավարման համակարգի նախագծումը հանգեցնել առանձին կապուղիների նախագծման՝ հիմնվելով դասական տեսության մեթոդների վրա: Բերված է հաշվարկման թվային օրինակ:

Առանցքային բաներ. քառապտուտակի կինեմատիկա, փոխադարձ կապեր, բազմաչափ կառավարման համակարգ, արտաքին վրդովմունքներ, կապազերծող կարգավորիչ:

**O.N. GASPARYAN, G.G. YEGHIAZARYAN, H.G. DARBINYAN,
L.M. BUNIATYAN**

**DEVELOPING A CONTROL SYSTEM OF A QUADROCOPTER
WITH A DECOUPLING REGULATOR**

The issues of developing a mathematical model of a control system of a quadcopter are considered, taking into account the dynamics of brushless DC motors. It is shown that the introduction of a matrix decoupling regulator into the system allows eliminating rigid cross-connections between control channels. As a result, the development of the control system of the quadcopter is reduced to the development of separate channels on the basis of methods of the classical feedback control. A numerical example design is given.

Keywords: quadcopter kinematics, cross-connections, multivariable control system, external disturbances, decoupling regulator.