УДК 514.752.44

В.А. МИРЗОЯН, Г.С. МАЧКАЛЯН, А.Р. НАЗАРЯН

ГЕОМЕТРИЯ ДВУХ КЛАССОВ РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ТРИ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В евклидовых пространствах исследуется локальная структура нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности три с двумя группами главных векторов кривизны.

Ключевые слова: риччи-полусимметрические подмногообразия, полуэйнштейновы подмногообразия, прямые произведения, конус.

Римановы риччи-полусимметрические многообразия, характеризуемые полупараллельностью тензора Риччи, являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых и полусимметрических многообразий (см. [1]). Они исчерпываются, в основном, произведениями эйнштейновых и полуэйнштейновых многообразий [2]. Примеры полуэйнштейновых подмногообразий в виде конусов над эйнштейновыми подмногообразиями были приведены в работах [3-8]. В настоящей работе дается геометрическое описание двух классов нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности три с двумя группами главных векторов кривизны (г.в.к.).

Пусть M является m-мерным нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности три в евклидовом пространстве E_{m+3} и M допускает только две группы регулярных г.в.к. $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, причём $W^{(1)}$ содержит только два неколлинеарных регулярных г.в.к. n_1 и n_2 с кратностями $p_1 \geq 2,\ p_2 \geq 2$ соответственно, а $W^{(2)}$ содержит или только один регулярный г.в.к. n_3 кратности $p_3 \geq 2$, или же два неравных коллинеарных г.в.к. n_3, n_4 кратностей $p_3 \geq 2,\ p_4 \geq 2$. Поскольку в обоих случаях мы будем проводить аналогичные рассуждения, то рассмотрим первый случай, а для второго случая просто сформулируем результат. Отметим, что в обоих случаях индекс регулярности подмногообразия M равен трём. При указанных условиях группа $W^{(0)}$ сингулярных г.в.к. может содержать только нулевой г.в.к. кратности ν, что мы и будем предполагать. Как мы знаем, векторы n_1 и n_2 ортогональны вектору n_3. Можно доказать, что в рассматриваемом случае подмногообразие M, вообще говоря, является существенно риччи-полусимметрическим, т.е. не удовлетворяет более сильным условиям полупараллельности или полусимметричности.

Поскольку группы $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ соответствуют разным собственным значениям Тензора Риччи, то будем считать, что группа $W^{(1)}$ соответствует собственному значению ρ_1, а группа $W^{(2)}$ − собственному значению ρ_2. Группа $W^{(0)}$, как мы знаем, соответствует нулевому собственному значению тензора Риччи. Так как векторы n_1, n_2, n_3 имеют кратности, то ρ_1 и ρ_2 также имеют кратности. Цель настоящей работы − дать геометрическое описание подмногообразия, удовлетворяющего указанным условиям.

Пусть $T_x^{(n_1)}$, $T_x^{(n_2)}$, $T_x^{(n_3)}$ обозначают собственные подпространства, соответствующие векторам n_1, n_2, n_3 в касательном пространстве $T_x(M)$ ($\dim T_x^{(n_1)} = p_1$, $\dim T_x^{(n_2)} = p_2$, $\dim T_x^{(n_3)} = p_3$). Из этих условий следует, что подпространства $T_x^{(0)}$ и T_x' совпадают ($\dim T_x^{(0)} = \dim T_x' = \mu = \nu$). Как нам известно, подпространство T_x', а следовательно и $T_x^{(0)}$, соответствуют нулевому г.в.к. Распределения $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$, $T^{(n_3)}$ интегрируемы, а их интегральные многообразия являются сферами размерностей p_1, p_2, p_3 соответственно. Эти сферы мы будем обозначать через S^{p_1}, S^{p_2}, S^{p_3}. Распределение $T^{(0)}$ также интегрируемо, а его интегральное многообразие представляет собой плоскость размерности ν, которую обозначим через L^{ν}.

Поскольку группа $W^{(1)}$ соответствует собственному значению ρ_1, то прямая сумма $\Delta_1(x) = T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)}$ является собственным подпространством тензора Риччи, соответствующим значению ρ_1. Тогда подпространство $\Delta_2(x) = T_x^{(n_3)}$ является собственным подпространством тензора Риччи, соответствующим значению ρ_2. Далее мы будем рассуждать точно так же, как и в [2] и [8]. Подпространства $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ будут инвариантны относительно операторов кривизны $R(X,Y)$, поскольку последние коммутируют с тензором Риччи (подробности см. в [2], [8]). Продолжая подпространства $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ методом З. Сабо [9] (процедура подробно описана в [2] при доказательстве теоремы 3.1), можем построить параллельные распределения $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$ такие, что $\Delta_1(x) \subseteq \tilde{\Delta}_1\ (x)$, $\Delta_2(x) \subseteq \tilde{\Delta}_2(x)$ (отметим, что расширение подпространств $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ происходит только за счёт $T_x^{(0)}$, которое в настоящем случае совпадает с собственным подпространством тензора Риччи R_1, соответствующим нулевому собственному значению). Так же, как и в [8], можем доказать, что распределения $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 подмногообразия M. Таким образом, распределения $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$ параллельны в римановой связности на M и сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2. Следовательно, подмногообразие M разлагается, в общем случае, в прямое произведение двух риччи-полусимметрических подмногообразий $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ (которые являются, соответственно, интегральными многообразиями распределений $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$) и некоторой плоскости (которая представляет собой оставшуюся часть от $T_x^{(0)}$). Разумеется, что структура этого произведения существенно зависит от размерности распределения $T^{(0)}$. Например, если $\mu = \nu = 0$, то распределения Δ_1, Δ_2 будут совпадать, соответственно, с распределениями $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$. В этом случае подмногообразие M разлагается в прямое произведение двух эйнштейновых (но не риччи-плоских) подмногообразий.

Поскольку подмногообразие $M^{(1)}$ является интегральным многообразием распределения $\tilde{\Delta}_1$, причём $\tilde{\Delta}_1(x)$ представляет собой расширение подпространства $\Delta_1(x) = T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)}$, то $M^{(1)}$ будет нормально плоским риччи-полусимметрическим (точнее, полуэйнштейновым) подмногообразием существенной коразмерности два с одним ненулевым собственным значением тензора Риччи ρ_1 и двумя неколлинеарными г.в.к. (напомним, что $W^{(1)}$ содержит два неколлинеарных регулярных г.в.к. n_1 и n_2), причём его индекс дефектности равен индексу относительной дефектности. Согласно [7], подмногообразие $M^{(1)}$ является или прямым произведением гиперсфер S^{p_1}, S^{p_2} и некоторой плоскости, или прямым произведением гиперсферы S^{p_1}, конуса вращения над гиперсферой S^{p_2} и некоторой плоскости, или прямым произведением двух конусов вращения, соответственно, над сферами S^{p_1}, S^{p_2} и некоторой плоскости, или прямым произведением конуса вращения над произведением $S^{p_1} \times S^{p_2}$ и некоторой плоскости.

Рассмотрим теперь подмногообразие $M^{(2)}$, которое фактически является полуэйнштейновой гиперповерхностью с одним ненулевым собственным значением тензора Риччи ρ_2 и одним кратным г.в.к. n_3, причём его индекс дефектности равен индексу относительной дефектности. Такое подмногообразие $M^{(2)}$ локально является или прямым произведением гиперсферы S^{p_3} и некоторой плоскости, или прямым произведением гиперконуса вращения над S^{p_3} и некоторой плоскости. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть M является m-мерным нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности три в евклидовом пространстве E_{m+3} и M допускает только две группы регулярных г. в. к. $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, причём $W^{(1)}$ содержит только два неколлинеарных вектора n_1 и n_2 кратностей $p_1 \geq 2,\ p_2 \geq 2$ соответственно, а $W^{(2)}$ содержит только один вектор n_3 кратности $p_3 \geq 2$. Предположим также, что группа $W^{(0)}$ сингулярных г.в.к. содержит только нулевой вектор. Тогда M является открытой частью одного из следующих прямых произведений:*

$$C^{(1)} \times C^{(2)} \times C^{(3)} \times L_{\mu-3},\ C^{(1)} \times C^{(2)} \times S^{p_3} \times L_{\mu-2},$$

$$\tilde{C}^{(1)} \times S^{p_3} \times L_{\mu-1},\ \tilde{C}^{(1)} \times C^{(3)} \times L_{\mu-2},\ S^{p_1} \times S^{p_2} \times S^{p_3} \times L_{\mu},$$

где $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}$ – гиперконусы вращения, соответственно, над сферами S^{p_1}, S^{p_2}, S^{p_3}; $\tilde{C}^{(1)}$ – конус над прямым произведением сфер S^{p_1}, S^{p_2}, а $L_{\mu}, L_{\mu-1}, L_{\mu-2}$ – плоскости соответствующих размерностей; μ – индекс дефектности, который по условию теоремы равен индексу относительной дефектности ν.

Теперь рассмотрим случай, когда группа $W^{(1)}$ содержит только два неколлинеарных регулярных г.в.к. n_1 и n_2 кратностей, соответственно, $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$, а $W^{(2)}$ содержит два неравных коллинеарных г.в.к. n_3, n_4, кратностей $p_3 \geq 2,\ p_4 \geq 2$. В этом случае имеем четыре распределения $T_x^{(n_1)}$, $T_x^{(n_2)}$,

$T_x^{(n_3)}$, $T_x^{(n_4)}$, которые, как мы знаем, интегрируемы, а их интегральные многообразия являются сферами размерностей p_1, p_2, p_3, p_4, которые обозначим через S^{p_1}, S^{p_2}, S^{p_3}, S^{p_4}. Поскольку группа $W^{(1)}$ соответствует собственному значению ρ_1, а группа $W^{(2)} -$ собственному значению ρ_2, то прямая сумма $\Delta_1(x) = T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)}$ является собственным подпространством тензора Риччи, соответствующим собственному значению ρ_1, а прямая сумма $\Delta_2(x) = T_x^{(n_3)} + T_x^{(n_4)}$ является собственным подпространством тензора Риччи, соответствующим собственному значению ρ_2. Рассуждая точно так же, как и в первом случае, получим, что подмногообразие M и в этом случае является прямым произведением подмногообразий $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$, которые являются интегральными многообразиями распределений $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$. Геометрия подмногообразия $M^{(1)}$ является точно такой же, как и в первом случае. Однако в настоящем случае подмногообразие $M^{(2)}$ является полуэйнштейновой гиперповерхностью с одним ненулевым собственным значением тензора Риччи ρ_2 и двумя кратными неравными коллинеарными г.в.к. n_3 и n_4, причём его индекс дефектности равен индексу относительной дефектности. Геометрическое строение такой гиперповерхности приведено в [4]. Согласно пункту (e) классификационной теоремы, доказанной в этой работе, $M^{(2)}$ представляет собой прямое произведение $K^{p_3+p_4+1} \times L$, где $L -$ некоторая плоскость (возможно, нулевой размерности), а $K^{p_3+p_4+1} -$ полуэйнштейнова гиперповерхность, которая представляет собой конус над прямым произведением $S^{p_3} \times S^{p_4}$, которое, в свою очередь, является эйнштейновым подмногообразием и принадлежит гиперсфере объемлющего пространства. С учётом результатов теоремы 1 можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть M является m-мерным нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности три в евклидовом пространстве E_{m+3} и M допускает только две группы регулярных г.в.к. $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, причём $W^{(1)}$ содержит только два неколлинеарных вектора n_1 и n_2 кратностей $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$ соответственно, а $W^{(2)}$ содержит только два неравных коллинеарных вектора n_3, n_4 кратностей $p_3 \geq 2$, $p_4 \geq 2$. Предположим также, что группа $W^{(0)}$ сингулярных г.в.к. содержит только* *нулевой вектор. Тогда M является открытой частью одного из следующих прямых произведений:*

$$C^{(1)} \times C^{(2)} \times K^{p_3+p_4+1} \times L_{\mu-3}, \; C^{(1)} \times S^{p_2} \times K^{p_3+p_3+1} \times L_{\mu-2},$$

$$\tilde{C}^{(1)} \times K^{p_3+p_4+1} \times L_{\mu-2}, \; S^{p_1} \times S^{p_2} \times K^{p_3+p_3+1} \times L_{\mu-1},$$

где $C^{(1)}, C^{(2)}$ *– гиперконусы вращения, соответственно, над сферами* S^{p_1}, S^{p_2}; $\tilde{C}^{(1)}$ *– конус над прямым произведением сфер* S^{p_1} и S^{p_2}; $K^{p_3+p_4+1}$ *– конус над прямым произведением сфер* S^{p_3} и S^{p_4} (как это было описано выше); $L_{\mu-1}, L_{\mu-2}, L_{\mu-3}$ *– плоскости соответствующих размерностей, а* μ *– индекс дефектности, который по условию теоремы равен индексу относительной дефектности* ν.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lumiste Ü**. Semiparallel submanifolds in space forms.- New York: Springer, 2009.- 306p.
2. **Мирзоян В.А.** Структурные теоремы для римановых Ric -полусимметрических пространств // Изв. Вузов. Математика. -1992. -№6. –С. 80-89.
3. **Мирзоян В.А.** Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric -полупараллельных подмногообразий // Изв. РАН. Сер.Матем. -2003. -67, №5. –С. 107-124.
4. **Мирзоян В.А**. Классификация Ric - полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах // Матем. сб. – 2000. - 191**,** № 9. – С. 65-80.
5. **Мирзоян В.А**., **Мачкалян Г.С**. Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия с однократными главными векторами кривизны // Докл. НАН Армении. – 2009. - 109, № 2. – С. 119-125.
6. **Мирзоян В.А.** Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2011. - 75, № 6. – С. 47-78.
7. **Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С**. О нормально плоских Ric – полусимметрических подмногообразиях в евклидовых пространствах // Изв.вузов. Матем. - 2012. -№ 9. - С.19-31.
8. **Mirzoyan V. A**. General classification of normally flat Ric -semisymmetric submanifolds // National Acad. Sci. of Armenia. Reports. – 2012. - 112, № 1. – P. 19-29.
9. **Szabo Z.I**. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0$. I. The local version // J.Differential Geom. – 1982. - 17**,** № 4. – P. 531-582.

Վ.Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, Գ.Ս. ՄԱՉԿԱԼՅԱՆ, Ա.Ռ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

ԵՐԵՔ ԿՈՉԱՓԱՆԻ ՌԻՉՉԻ-ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՐԿՈՒ ԴԱՍԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Էվկլիդեսյան տարածություններում հետազոտվում է կորության գլխավոր վեկտորների երկու խումբ ունեցող երեք կոչափանի նորմալ հարթ Ռիչչի – կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների լոկալ կառուցվածքը:

Առանցքային բառեր. Ռիչչի – կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ, ուղիղ արտադրյալներ, կոն:

V.A. MIRZOYAN, G.S. MACHKALYAN, A.R. NAZARYAN

GEOMETRY OF THE TWO CLASSES OF RICCI-SEMISYMETRIC SUBMANIFOLDS OF CODIMENSIONALITY THREE IN EUCLIDEAN SPACES

In Euclidean space, the local structure of normally flat Ricci-semi-symmetric submanifolds of codimensionality three with two groups of principal curvature vectors is investigated.

Keywords: Ricci-semi-symmetric submanifolds, semi-Einstein submanifolds, direct products, cone.

УДК 517.53

И.В. ОГАНИСЯН

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕЙЛОРА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$

М.М. Джрбашян обобщил класс мероморфных в единичном круге функций Р. Неванлинны, вводя классы N_α и произведения B_α, $-1<\alpha<+\infty$. В работе получены оценки для коэффициентов Тейлора произведений Бляшке и исследована достаточность известных оценок для коэффициентов Тейлора специальных функций из $N_\alpha \subset N_0$, $-1<\alpha<0$.

Ключевые слова: *к*лассы М.М. Джрбашяна, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, коэффициенты Тейлора.

М.М. Джрбашяном [1, глава IX], [2] введены в рассмотрение классы $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.