Վ.Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, Գ.Ս. ՄԱՉԿԱԼՅԱՆ, Ա.Ռ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

ԵՐԵՔ ԿՈՉԱՓԱՆԻ ՌԻՉՉԻ-ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՐԿՈՒ ԴԱՍԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Էվկլիդեսյան տարածություններում հետազոտվում է կորության գլխավոր վեկտորների երկու խումբ ունեցող երեք կոչափանի նորմալ հարթ Ռիչչի – կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների լոկալ կառուցվածքը:

Առանցքային բառեր. Ռիչչի – կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ, ուղիղ արտադրյալներ, կոն:

V.A. MIRZOYAN, G.S. MACHKALYAN, A.R. NAZARYAN

GEOMETRY OF THE TWO CLASSES OF RICCI-SEMISYMETRIC SUBMANIFOLDS OF CODIMENSIONALITY THREE IN EUCLIDEAN SPACES

In Euclidean space, the local structure of normally flat Ricci-semi-symmetric submanifolds of codimensionality three with two groups of principal curvature vectors is investigated.

Keywords: Ricci-semi-symmetric submanifolds, semi-Einstein submanifolds, direct products, cone.

УДК 517.53

И.В. ОГАНИСЯН

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕЙЛОРА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$

М.М. Джрбашян обобщил класс мероморфных в единичном круге функций Р. Неванлинны, вводя классы N_α и произведения B_α, $-1<\alpha<+\infty$. В работе получены оценки для коэффициентов Тейлора произведений Бляшке и исследована достаточность известных оценок для коэффициентов Тейлора специальных функций из $N_\alpha \subset N_0$, $-1<\alpha<0$.

Ключевые слова: *к*лассы М.М. Джрбашяна, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, коэффициенты Тейлора.

М.М. Джрбашяном [1, глава IX], [2] введены в рассмотрение классы $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.

Класс $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ определяется посредством α-характеристики

$$T_\alpha\left(r,F\right)=m_\alpha\left(r,F\right)+N_\alpha\left(r,F\right),$$

как множество тех мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\left\{T_\alpha\left(r,F\right)\right\}<+\infty.$$

При этом функции $m_\alpha\left(r,F\right), N_\alpha\left(r,F\right)$ и $T_\alpha\left(r,F\right)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r,F), N(r,F)$ и $T(r,F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha=0$ так, что класс N_0 совпадает с классом N Неванлинны.

Вместе с тем важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_\alpha\subset N_0=N, \left(-1<\alpha<0\right).$$

Оператор интегродифференцирования $D^{-\alpha}$ (при $-1<\alpha<+\infty$) в смысле Риммана-Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r(r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt, \ \left(0<\alpha<+\infty\right),$$

$$D^0\left\{\varphi(r)\right\}=\varphi(r),$$

$$D^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\}=\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\left\{\varphi(r)\right\} \quad \left(-1<\alpha<0\right).$$

Для аналитических функций, принадлежащих классу N_α, функция $T_\alpha\left(r,F\right)$ определяется следующим образом:

$$T_\alpha\left(r,f\right)=\int_{-\pi}^{\pi}D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\}=\max\left\{D^{-\alpha}\left\{\varphi(r)\right\};0\right\}.$$

Известно, что (см. [1], [2]) аналитическая функция класса N_α имеет вид

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha} z^\lambda B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi(\theta)\right\}, \qquad (1)$$

где γ - произвольное вещественное число; λ - произвольное натуральное число; $K_\alpha=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}$; $\psi(\theta)$ - вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi;\pi]$,

$$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{-W_\alpha(z;a_n)},$$

$$W_\alpha(z,\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right\}z^k,\ |z|<1,\ |\xi|<1,$$

$$S_\alpha(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right],\ |z|<1.$$

$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)$ называется произведением М.М. Джрбашяна. В специальном случае $\alpha=0$ произведение B_α совпадает с произведением Бляшке:

$$B_0\left(z;\{a_n\}\right)=B\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\frac{|a_n|}{a_n}.$$

Класс $A_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ определяется как множество аналитических функций $f(z)$ из N_α, для которых в представлении (1) функция $\psi(\theta)$ - невозрастающая на промежутке $[0,2\pi]$. Известно [2], что класс $A_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ имеет важную роль в вопросах представления функций класса $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, а класс $A_\alpha^*(-1<\alpha<0)$ является некоторым подмножеством ограниченных аналитических функций класса $N_\alpha(-1<\alpha<0)$.

В работах [3] и [4] оценены коэффициенты Тейлора функций класса $A_\alpha^*(-1<\alpha\le 0)$.

Теорема А. Пусть $-1<\alpha\le 0$ и $f(z)$ - функция из класса A_α^*. Тогда для коэффициентов Тейлора функции $f(z)$ справедлива оценка

$$\left|\hat{f}(n)\right| = O\left(n^\alpha\right),\ n\to\infty .$$

Теорема В. Пусть $f(z)$ - функция из класса $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<0\right)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2 n^{-\beta}<+\infty,\ \beta\in(\alpha;0].$$

В настоящей работе, рассматривая вопрос достаточности приведенных оценок, доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. Существуют произведения Бляшке $B(z,\{z_k\})\in A\setminus A_\alpha$ для всех значений параметра $\alpha\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$, тейлоровские коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{B}(n)\right|^2 n^{-\alpha}<+\infty,\ \alpha\in\left(-\frac{1}{2},\ 0\right).$$

Теорема 2. Существуют такие произведения Бляшке $B(z,\{z_k\})\in A\setminus A_\alpha$ для всех значений параметра $\alpha\in\left(-\frac{1}{4};0\right)$, тейлоровские коэффициенты которых имеют порядок $O\left(n^\alpha\right),\ n\to+\infty$.

Известная теорема [5] о необходимом и достаточном условии принадлежности функции Бляшке $B(z;\{z_k\})$ классу $A_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$ существенным образом используется при доказательствах приведенных теорем.

Теорема (М.М. Джрбашян**).** Пусть $\alpha\in(-1;0]$, тогда условие Бляшке-Джрбашяна

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha}<\infty$$

для последовательности $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ и принадлежность произведений Бляшке $B(z;\{z_k\})$ классу A_α эквивалентны.

Следствие 1. Оценка тейлоровских коэффициентов

$$\left|\hat{f}(n)\right| = O\left(n^{\alpha}\right),\ n \to \infty$$

является только необходимым условием для того, чтобы функция класса A принадлежала классу A_{α}^{*}, $-\frac{1}{4} < \alpha < 0$.

Следствие 2. Оценка теоремы 2 является только необходимым условием того, что функция множества A принадлежит подклассу

$$A_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{2} < \alpha < 0\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. - М.: Наука.1966. - 672 с.
2. **Джрбашян М.М., Захарян В.С.** Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге. – М.: Наука, 1993. – 224 с.
3. **Оганисян И.В.** Об одном представлении функций класса М.М.Джрбашяна// ДАН АрмССР. -1989.- Т.88., №2.- С 55- 60.
4. **Захарян В.С., Оганисян И.В.** О коэффициентах Тейлора одного класса аналитических в круге функций// ДАН РА.- 2014.- Т.114, №3.- С.192-198.
5. **Джрбашян М.М.** Об одном свойстве функций Бляшке// ДАН СССР.- 1967.- Т. 175, № 5.- С.981-984.

Ի.Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

$N_{\alpha}\left(-1 < \alpha < 0\right)$ ԴԱՍԵՐԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԹԵՅԼՈՐԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՄԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆԻ ՄԱՍԻՆ

Մ.Մ. Ջրբաշյանն ընդհանրացրել է միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների Ռ. Նևանլինայի $N_0 \equiv N$ դասը, ներմուծել N_{α} դասերը և B_{α} արտադրյալները, $-1 < \alpha < +\infty$: Աշխատանքում Բլյաշկեի արտադրյալների Թեյլորի գործակիցների համար ստացվել են գնահատականներ, որոնցով հետազոտվում է $N_{\alpha} \subset N_0$, $-1 < \alpha < 0$ դասերի հատուկ տեսքի ֆունկցիաների Թեյլորի գործակիցների համար հայտնի գնահատականների բավարարությունը:

Առանցքային բառեր. Ջրբաշյանի դասեր, Բլյաշկեի արտադրյալ, Ջրբաշյանի արտադրյալ, Թեյլորի գործակիցներ:

I.V. HOVHANNISYAN

ESTIMATION OF TAYLOR COEFFICIENTS OF ANALYTICAL FUNCTIONS OF CLASSES $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$

M.M. Djrbashyan has generalized the class $N_0 \equiv N$ R. Nevanlinna, introducing classes N_α and products B_α, $-1<\alpha<+\infty$. We derive estimates for the Taylor coefficients of Blaschke product and investigate the sufficiency of some estimates for the Taylor coefficients of functions from some special subclass of $N_\alpha \subset N_0$, $-1<\alpha<0$.

Keywords: *c*lasses of M.M. Djrbashyan**,** product of Blaschke, product of Djrbashyan, Taylor coefficients.

УДК 517.946

А.О. БАБАЯН, С.О. АБЕЛЯН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для правильно эллиптического уравнения шестого порядка. Предполагается, что характеристическое уравнение имеет два различных трехкратных корня и один из корней - мнимая единица. Доказано, что в этом случае задача Дирихле однозначно разрешима.

***Ключевые слова*:** задача Дирихле, дефектные числа, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, правильно эллиптическое уравнение.

Пусть $D = \{\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{iy} : |z| = \mathrm{r} < 1\}$, а $\Gamma = \partial D$. В области D рассмотрим правильно эллиптическое уравнение шестого порядка:

$$\frac{\partial^3}{\partial \overline{z}^3}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^3 u = 0\,. \qquad (1)$$

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ – операторы комплексного дифференцирования; μ – постоянное число такое, что $0 < |\mu| < 1$. Предполагается, что искомое решение u шесть раз непрерывно дифференцируемо в D и вместе с производными второго порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е. $u \in C^{(2,\alpha)}\left(\overline{D}\right)$.