

I.V. HOVHANNISYAN
ESTIMATION OF TAYLOR COEFFICIENTS OF ANALYTICAL
FUNCTIONS OF CLASSES N_α ($-1 < \alpha < 0$)

M.M. Djrbashyan has generalized the class $N_0 \equiv NR$. Nevanlinna, introducing classes N_α and products B_α , $-1 < \alpha < +\infty$. We derive estimates for the Taylor coefficients of Blaschke product and investigate the sufficiency of some estimates for the Taylor coefficients of functions from some special subclass of $N_\alpha \subset N_0$, $-1 < \alpha < 0$.

Keywords: classes of M.M. Djrbashyan, product of Blaschke, product of Djrbashyan, Taylor coefficients.

УДК 517.946

А.О. БАБАЯН, С.О. АБЕЛЯН
О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО ПРАВИЛЬНО
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА В
ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для правильно эллиптического уравнения шестого порядка. Предполагается, что характеристическое уравнение имеет два различных трехкратных корня и один из корней - мнимая единица. Доказано, что в этом случае задача Дирихле однозначно разрешима.

Ключевые слова: задача Дирихле, дефектные числа, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, правильно эллиптическое уравнение.

Пусть $D = \{z = x + iy : |z| = r < 1\}$, а $\Gamma = \partial D$. В области D рассмотрим правильно эллиптическое уравнение шестого порядка:

$$\frac{\partial^3}{\partial \bar{z}^3} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^3 u = 0. \quad (1)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ – операторы комплексного дифференцирования; μ – постоянное число такое, что $0 < |\mu| < 1$. Предполагается, что искомое решение u шесть раз непрерывно дифференцируемо в D и вместе с производными второго порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е. $u \in C^{(2,\alpha)}(\bar{D})$.

Для уравнения (1) рассматриваем задачу Дирихле в классической постановке. На границе $\Gamma = \partial D$ неизвестная функция u удовлетворяет условиям Дирихле

$$u|_{\Gamma} = f_0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\Gamma} = f_1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\Big|_{\Gamma} = f_2. \quad (2)$$

Здесь заданные функции f_j принадлежат классу $C^{(2-j, \alpha)}(\Gamma)$. В [1] было доказано, что условия (2) эквивалентны условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^k \partial \bar{z}^{2-k}}\Big|_{\Gamma} = F_k, \quad k = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Здесь $F_k \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ - заданные функции, однозначно определяемые функциями f_0, f_1, f_2 .

Итак, рассмотрим задачу (1), (3). Как известно (см. [2], [3]), задача (1), (3) фре-дгольмова. Целью работы является определение дефектных чисел этой задачи. Случай двукратных корней для уравнения типа (1) четвертого порядка был рассмотрен в [4]. В [1] было показано, что общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$u = \Phi_1(z) + \bar{z}\Phi_2(z) + \bar{z}^2\Phi_3(z) + \Psi_1(\bar{z} + \mu z) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_2(\bar{z} + \mu z) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Psi_3(\bar{z} + \mu z), \quad (4)$$

где Φ_j и Ψ_j ($j = 0, 1$) - аналитические функции в областях D и

$D_1(\mu) = \{\bar{z} + \mu z | z \in D\}$ соответственно, которые необходимо определить; $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ -

производная по аргументу комплексного числа ($z = re^{i\varphi}$). Подставим функцию (4) в граничные равенства (3). Используя операторное тождество [1]

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m} \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + (k-m)iI \right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m},$$

получим

$$2\Phi_3(z) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \Psi_1(\bar{z} + \mu z) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - 2iI \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \Psi_2(\bar{z} + \mu z) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - 2iI \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \Psi_3(\bar{z} + \mu z) = F_0$$

или

$$2\Phi_3(z) + \Psi_1''(\bar{z} + \mu z) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2iI\right)\Psi_2''(\bar{z} + \mu z) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2iI\right)^2\Psi_3''(\bar{z} + \mu z) = F_0.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2'(z) + 2\bar{z}\Phi_3'(z) + \mu\Psi_1''(\bar{z} + \mu z) + \mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_2''(\bar{z} + \mu z) + \mu\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Psi_3''(\bar{z} + \mu z) &= F_1, \\ \Phi_1''(z) + \bar{z}\Phi_2''(z) + \bar{z}^2\Phi_3''(z) + \mu^2\Psi_1''(\bar{z} + \mu z) + \mu^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2iI\right)\Psi_2''(\bar{z} + \mu z) &+ \\ + \mu^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2iI\right)^2\Psi_3''(\bar{z} + \mu z) &= F_2. \end{aligned}$$

Представим Ψ_j'' на окружности Γ , используя представление, полученное в [2]:

$$\Psi_j''(\bar{z} + \mu z) = \psi_j(\bar{z}) + \psi_j(\mu z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk}\bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk}\mu^k z^k, \quad j=0,1, \quad z \in \Gamma, \quad (5)$$

а также разложим функции Φ_j в ряд Тейлора $\Phi_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk}z^k$. Так как подлежащие определению функции Φ_j и ψ_j аналитичны в круге D , то они определяются своими коэффициентами Тейлора A_{jk} и B_{jk} . Разложим функции F_0, F_1, F_2 на окружности Γ в ряд Фурье

$$F_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk}z^k, \quad j=0,1,2. \quad (6)$$

Для определения этих коэффициентов Тейлора A_{jk} и B_{jk} подставим разложения (5) и (6) в граничные условия (3):

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=0}^{\infty} B_{3k}z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k}\bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k}\mu^k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}(-ik-2i)\bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}(ik-2i)\mu^k z^k + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} A_{3k}(-ik-2i)\bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{3k}(ik-2i)\mu^k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{0k}z^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} k z^{k-1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} k z^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \mu A_{1k} \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} \mu^{k+1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \mu(-ik) \bar{z}^k + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \mu^{k+1} (ik) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{3k} \mu(-ik)^2 \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{3k} \mu^{k+1} (ik)^2 z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{1k} z^k, \\
& \sum_{k=2}^{\infty} B_{1k} k(k-1) z^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} B_{2k} k(k-1) z^{k-3} + \sum_{k=2}^{\infty} B_{3k} k(k-1) z^{k-4} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} \mu^2 \bar{z}^k + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} \mu^{k+2} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} (-ik+2i) \mu^2 \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} (ik+2i) \mu^{k+2} z^k + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} A_{3k} (-ik-2i)^2 \mu^2 \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{3k} (ik+2i)^2 \mu^{k+2} z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{2k} z^k.
\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях z и \bar{z} , получим системы для определения неизвестных A_{jk} . При $k \geq 1$ получаем систему трех уравнений относительно неизвестных A_{jk} :

$$\begin{aligned}
A_{1k} + (-ik - 2i) A_{2k} + (ik - 2i)^2 A_{3k} &= d_{-0k}, \\
\mu A_{1k} + \mu(-ik) A_{2k} + \mu(-ik)^2 A_{3k} &= d_{-1k}, \\
\mu^2 A_{1k} + \mu^2(-ik + 2i) A_{2k} + \mu^{k+2}(-ik + 2i) A_{3k} &= d_{-2k}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Определитель основной матрицы системы (7) имеет вид

$$\Omega_k = \det \tilde{\Omega}_k \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & -i(k+2) & (-ik-2i)^2 \\ \mu & (-ik)\mu & (-ik)^2 \mu \\ \mu^2 & -i(k-2)\mu^2 & (-ik+2i)^2 \mu^2 \end{pmatrix}.$$

После преобразований получим

$$\Omega_k = \begin{vmatrix} 1 & -i(k+2) & (-ik-2i)^2 \\ \mu & (-ik)\mu & (-ik)^2 \mu \\ \mu^2 & -i(k-2)\mu^2 & (-ik+2i)^2 \mu^2 \end{vmatrix} = 16\mu^3 i \neq 0.$$

Так как $\mu \neq 0$, то при $k > 3$ детерминант отличен от нуля. Следовательно, коэффициенты A_k, B_k при $k > 3$ определены единственным образом. Остальные коэффициенты (при $k \leq 3$) определяются неоднозначно, однако это не влияет на однозначную разрешимость исходной задачи. Таким образом, получается следующее предложение.

Теорема. Задача (1), (3) и, следовательно, исходная задача (1), (2) однозначно разрешима, т.е. решение задачи (1), (2) существует при любых граничных функциях f_j , и это решение единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабаян А.О.** О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге// Известия НАН Армении. Математика. -2003.-Т.38, №6.- С.39-48.
2. **Tomasyan N.E.** Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. - Singapore, London, Hong-Kong: World Scientific Publishing Co. Ltd. 1998.-236p.
3. **Lions J.-L., Magenes E.** Problèmes aux limites nonhomogènes et applications. Vol. I. – Paris: Dunod, 1968. - 372p.
4. **Бабаян А.О.** Задача Дирихле для уравнения в частных производных четвертого порядка в случае двукратных корней характеристического уравнения// Mathematica Montisnigri. -2015.-V.32.- С.66-80.

Ա.Օ. ԲԱԲԱՅԱՆ, Ս.Հ. ԱԲԵԼՅԱՆ

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴԻՐԸ ՄԻԱՎՈՐ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՃՇԳՐԻՏ ՄԻ ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը միավոր շրջանում վեցերորդ կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար: Ենթադրվում է, որ բնութագրիչ հավասարումն ունի երկու իրարից տարբեր եռապատիկ արմատներ, և արմատներից մեկը կեղծ միավոր է: Ապացուցվում է, որ այս դեպքում Դիրիխլեի խնդիրը միարժեքորեն լուծելի է:

Առանցքային բաներ. Դիրիխլեի խնդիր, դեֆեկտային թվեր, Դիրիխլեի համասեռ խնդրի ոչ զրոյական լուծումները, ճշգրիտ էլիպսական հավասարում:

A.H. BABAYAN, S.H. ABELYAN

THE DIRICHLET PROBLEM FOR A PROPERLY ELLIPTIC EQUATION OF THE SIXTH ORDER IN THE UNIT DISC

The Dirichlet problem in a unit disc for a sixth order properly elliptic equation is considered. It is supposed that the characteristic equation has two different triple roots and one of the roots is an imaginary unit. It is proved that this problem is uniquely solvable.

Keywords: Dirichlet problem, defect numbers, nontrivial solutions of homogeneous Dirichlet problem, properly elliptic equation.