ՀՏԴ 517

Լ.Ջ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԳՐԱՄԻ ՄԱՏՐԻՑԻ ՀԵՏ ԿԱՊՎԱԾ ԲԻՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՀԱՄԱԽՄԲԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ուսումնասիրվում է գծորեն անկախ համախմբով ծնված բիօրթոգոնալ համակարգի, ինչպես նաև միջանկյալ օրթոնորմալ համակարգի շեղումը սկզբնական համակարգից:

Առանցքային բառեր. Գրամի մատրից և դետերմինանտ, բիօրթոգոնալ համախումբ, նվազագույն միջին քառակուսային շեղում:

Դիցուք $\{f_k\}_1^n$ –ը $\left(H,\langle\bullet,\bullet\rangle\right)$ ունիտար տարածության գծորեն անկախ համախումբ է: Դժվար չէ համոզվել, որ գոյություն ունի $\{f_k\}_1^n$ –ի հետ բիօրթոգոնալ $\{g_m\}_1^n$ համախումբ, այսինքն՝ $\langle f_k, g_m\rangle = \delta_{km}$, որտեղ δ_{km} –ն Կրոնեկերի սիմվոլն է: Քննարկենք

$$L\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right)=\begin{vmatrix} \langle f_1,f_1\rangle & \langle f_2,f_1\rangle & \cdots & \langle f_{n-1},f_1\rangle & \langle f_n,f_1\rangle \\ \langle f_1,f_2\rangle & \langle f_2,f_2\rangle & \cdots & \langle f_{n-1},f_2\rangle & \langle f_n,f_2\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle f_1,f_{n-1}\rangle & \langle f_2,f_{n-1}\rangle & \cdots & \langle f_{n-1},f_{n-1}\rangle & \langle f_n,f_{n-1}\rangle \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \end{vmatrix}$$

դետերմինանտը: Այն պետք է ընկալել որպես վերջին տողում գտնվող տարրերի գծային կոմբինացիա՝ տարրի հանրահաշվական լրացմանը հավասար գործակցով: Սկալյարապես բազմապատկելով այն հերթով $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}$ տարրերով, կստանանք երկու միատեսակ տողերով դետերմինանտներ, ինչից էլ կարելի է եզրակացնել, որ այդպիսի սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի, ուստի $L\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right)$-ը օրթոգոնալ է համապատասխան տարրին: Ինչ վերաբերում է $\langle L\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right),f_n\rangle$ սկալյար արտադրյալին, ապա այն հավասար կլինի $\{f_k\}_1^n$ տարրերով առաջացած Գրամի

$$G_n=G\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right)=\begin{pmatrix} \langle f_1,f_1\rangle & \langle f_2,f_1\rangle & \cdots & \langle f_n,f_1\rangle \\ \langle f_1,f_2\rangle & \langle f_2,f_2\rangle & \cdots & \langle f_n,f_2\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle f_1,f_n\rangle & \langle f_2,f_n\rangle & \cdots & \langle f_n,f_n\rangle \end{pmatrix}$$

մատրիցի դետերմինատին: Այսպիսով՝

$$g_n = \frac{1}{\det(G_n)} L(f_1, f_2, \cdots, f_n):$$

Հիշեցնենք, որ Գրամի մատրիցի դետերմինանտը հավասար է նրան ծնող տարրերի վրա կառուցված հիպերզուգահեռանիստի հիպերծավալի քառակուսուն, ուստի այն գծորեն անկախ տարրերի համախմբի դեպքում դրական է:

Եթե $\{f_k\}_1^n$ լինի H տարածության բազիս, ապա ցանկացած $x \in H$ տարր կարելի է վերլուծել ըստ այդ բազիսի՝

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \ , \tag{1}$$

ընդ որում՝ $c_k = \langle x, g_k \rangle$:

Հայտնի է, որ $x \mapsto \langle x, g_k \rangle f_k$ համապատասխանությունն իրականացնող օպերատորը կոչվում է g_k և f_k տարրերի թենզորական արտադրյալ և նշանակվում է $g_k \otimes f_k$ սիմվոլով: (1) բանաձևը նշանակում է, որ նույնական I օպերատորի համար տեղի ունի

$$I = \sum_{k=1}^{n} g_k \otimes f_k$$

ներկայացումը:

$\{g_k\}_1^n$ համախումբը կրկին բազիս կլինի (այն կոչվում է$\{f_k\}_1^n$--ի երկակի բազիս) [1]: Այսպիսով՝

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle g_k \ ,$$

որտեղից

$$f_m = \sum_{k=1}^{n} \langle f_m, f_k \rangle g_k \ , \tag{2}$$

ինչն էլ նշանակում է, որ $\{g_k\}_1^n$ բազիսում Գրամի մատրիցով տրվող $\mathbf{G}$ օպերատորը g_k տարրին համապատասխանեցնում է դնում f_k տարրը: Դրա հակադարձ $\mathbf{G}^{-1}$ օպերատորը $\{f_k\}_1^n$ համախմբին համապատասխանության մեջ կդնի բիօրթոգոնալ $\{g_k\}_1^n$ համախումբը: Նշենք, որ $\mathbf{G}^{-1}$ օպերատորի մատրից-ը համընկնում է $\{g_k\}_1^n$ տարրերի Գրամի մատրիցի հետ:

Օրինակ: Քննարկենք $L^2(0;1)$ տարածությունը և միանդամների $f_1=1, f_2=t, f_3=t^2$ համախումբը: Գրամի G մատրիցը այս դեպքում համընկնում է Հիլբերթի հանրահայտ մատրիցի հետ,

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix},$$

իսկ՝ $g_1=30t^2-36t+9, g_2=-180t^2+192t-36, g_3=180t^2-180t+30.$

Ինչ վերաբերում է $K(x,t)=\sum_{k=1}^{3} f_k(x)g_k(t)$ կորիզին, ապա այն հավասար է $K(x,t)=180x^2t^2-180x^2t-180xt^2+30t^2+192xt+30t^2-36x-36t+9$.

Քանի որ դրական են Գրամի մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորները, ապա Գրամի մատրիցը դրական որոշված է: Նույնը կարելի է ասել $\mathbf{G}$ և $\mathbf{G}^{-1}$ օպերատորների մասին: Համաձայն օպերատորների սպեկտրալ տեսության՝ ցանկացած դրական A օպերատորից կարելի է հանել միակ դրական քառակուսի արմատ:

Հաշվել այն, օգտվելով սահմանումից, բավականին դժվար է: Որպես օրինակ նկատենք, որ երկչափանի

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

մատրիցի համար

$$G^{-1/2}=\begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{16+9\sqrt{3}}{13}} & -\sqrt{\dfrac{36-9\sqrt{3}}{13}} \\ -\sqrt{\dfrac{36-9\sqrt{3}}{13}} & \sqrt{\dfrac{120+9\sqrt{3}}{13}} \end{pmatrix}:$$

Արմատ հանելու գործողությունը կարելի է իրականացնել

$$B_0=\mathbf{0}, B_{n+1}=B_n+1/2\left(A-B_n^2\right)$$

իտերացիոն բանաձևով:

Ինչպես պարզվում է, այս հաջորդականությունը բավականին դանդաղ է զուգամիտում: Ավելի լավ արդյունք կարելի է ստանալ՝ օգտագործելով արմատի հաշվման հանրահայտ բաբելոնյան ալգորիթմը: Սահմանենք իտերացիոն գործընթաց հետևյալ կերպ՝

$$B_0 = I, B_{n+1} = 1/2\left(B_n + AB_n^{-1}\right):$$

Դժվար չէ համոզվել, որ նման ձևով սահմանված $\{B_n\}$ հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամ տեղափոխելի է A օպերատորի հետ: Իրոք, այդ պնդումը տեղի ունի սկզբնական մոտավորության դեպքում: Ակնհայտ է նաև, որ $AB_n = B_n A$ հավասարությունից հետևում է $AB_n^{-1} = B_n^{-1}A$, որն էլ ավարտում է ինդուկցիոն ապացույցը:

Հեղինակի [2] աշխատանքում ապացուցվել են հետևյալ երկու կարևոր պնդումները:

Պնդում 1: Դիցուք $J = \mathbf{G}^{-1/2}$: $e_n = Jf_n$ բանաձևով որոշվող համախումբը օրթոնորմալ է:

Դիցուք $\{l_n\}$-ը ինչ-որ օրթոնորմալ համախումբ է, իսկ U –ն՝ օպերատոր, որը բազիսային $\{e_n\}$ տարրերի վրա գործում է $Ue_m = l_m$ բանաձևով, իսկ մնացած տարրերի վրա տարածված է գծայնորեն և $B = \mathbf{G}^{\frac{1}{2}}U$:

Պնդում 2: Վերը ներմուծված $\{e_n\}$ համախումբը գտնվում է $\{f_k\}_1^n$ համախմբից միջին քառակուսային իմաստով նվազագույն հեռավորության վրա, այսինքն ՝

$$\inf_{\{l_k\}} \sum_{k=1}^{n} \left\| l_k - e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\| f_k - e_k \right\|^2 = tr\mathbf{G} - 2\operatorname{Re} trB + n,$$

որտեղ trB -ով նշանակված է B մատրիցի հետքը:

Այս աշխատանքում հաշվարկների միջոցով ցույց է տրվում, որ $(-1,1)$ միջակայքում $w_1(x) \equiv 1, w_2(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}, w_3(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ կշիռների համար կառուցված $\{e_n\}$ բազմանդամների դեպքում տեղի ունի հետևյալ հատկությունը:

Պնդում 3: 1. Յուրաքանչյուր e_n բազմանդամ ունի $n-1$ իրական արմատներ, որոնք պատկանում են օրթոգոնալության $(-1,1)$ միջակայքին: 2. e_n և e_{n+1} բազմանդամների արմատները հերթագայվում են, այսինքն՝ e_{n+1}–ի յուրաքանչյուր երկու հարևան արմատների միջև կա e_n բազմանդամի միայն մեկ արմատ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Brezinski C.** Biorthogonality and its applications to numerical analysis. - Marcel Dekker, Inc, 1992.
2. **Gevorgyan L.** An alternative to Gram-Schmidt orthogonalization// Math. Sci.Res. J. - 2006. **10**, no. 1.-P. 1—6, **MR 2208658**

Л.З. ГЕВОРГЯН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ С МАТРИЦЕЙ ГРАМА

Изучается отклонение биортогональной по отношению к линейно независимой системе, а также промежуточной ортогональной системы от первоначальной.

Ключевые слова: матрица и детерминант Грама, биортогональная система, наименьшее среднеквадратическое отклонение.

L.Z. GEVORGYAN

SOME PROPERTIES OF BIORTHOGONAL SYSTEMS CONNECTED WITH THE GRAM MATRIX

The discrepancy of biorthogonal with respect to linearly independent systems as well that of intermediate orthonormal system from initial system is investigated.

Keywords: Gram matrix and determinant, biothogonal system, least mean square discrepancy.

УДК 517. 948

С.А. ЕПИСКОПОСЯН, Т.М. САГАТЕЛЯН

О СУЩЕСТВОВАНИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ КРИСТЕНСОНА-ЛЕВИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $L^p_\mu[0,1],\ p \geq 1$

Рассматривается вопрос существования универсальных рядов по системе Кристенсена-Леви в весовых пространствах $L^p_\mu[0,1],\ p \geq 1$ относительно перестановок и знак-ов.

Ключевые слова: система Кристенсона-Леви, универсальный ряд, весовое пространство.

Напомним определение системы Кристенсона-Леви (см. [1]). Пусть $a \geq 2$ - фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi}{a} i}$.

Как и в классическом случае, сначала определим обобщенную систему Радемахера.