

Г.М. АЙРАПЕТЯН, В.Г. ПЕТРОСЯН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В единичном круге комплексной плоскости рассматривается граничная задача Дирихле в классе бигармонических функций в случае, когда граничные функции принадлежат $L^1(\rho)$, где $\rho(t) = |1 - t|^\alpha$, α – действительное число. Установлено, что эта задача нормально разрешима.

Ключевые слова: задача Дирихле, весовое пространство, граничное условие, бигармоническая функция.

1. Пусть $T = \{z: |z| = 1\}$ – единичная окружность, $D^+ = \{z: |z| < 1\}$. Рассматривается следующая граничная задача: определить функцию $u(z)$, $z \in D^+$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\Delta^2 u = 0 \quad (1)$$

и граничным условиям

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \frac{\partial^k u(rt)}{\partial r^k} - f_k(t) \right\|_{L^1(\rho_k)} = 0, k = 0, 1, \quad (2)$$

где $\rho_0(t)$ – весовая функция вида $\rho_0(t) = |1 - t|^\alpha$; α – действительное число; $\rho_1(t) = \rho_0(t)|1 - t|$, $\|\cdot\|_{L^1(\rho_k)}$ – норма пространства $L^1(\rho_k)$, $k = 0, 1$; $f_k(t)$ – действительные функции на T такие, что $f_k(t) \in L^1(\rho_k)$, $k = 0, 1$.

Задача (1), (2) в классической постановке, когда f_k и решение u – достаточно гладкие функции в D^+ , исследована в работах [1], [2]. Эта задача, когда $\rho_1(t) = \rho_0(t)$, исследована в [3], где установлено, что она нормально разрешима. В работе [4] данная задача исследована в случае, когда $\rho_1(t) = \rho_0(t) = |1 - t|^\alpha$, $\alpha \in (-1; 0]$, где установлено, что однородная задача имеет только тривиальное решение и неоднородная задача разрешима для любых функций $f_k(t) \in L^1(\rho_k)$.

В настоящей работе устанавливается, что задача (1), (2) нормально разрешима, при этом, если $\alpha \leq -1$, предлагается следующая формулировка этой задачи, а именно:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \frac{\partial^k u(rt)}{\partial r^k} - f_k(t) \right\|_{L^1(\rho_k(r))} = 0, k = 0, 1, \quad (3)$$

где $\rho_k(rt) = |1 - rt|^{n+k}|1 - t|^{\alpha-n}$ и $n = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha - \text{целое,} \\ [\alpha] + 1, & \text{если } \alpha - \text{нецелое.} \end{cases}$

2. Лемма 1. Пусть $\alpha \leq -1$. Тогда однородная задача (1), (3) имеет только тривиальное решение, то есть, если $f_k(t) \equiv 0, k = 0, 1, t \in T$, то $u(z) \equiv 0$.

Доказательство. Хорошо известно, что общее решение уравнения (1) можно представить в виде (см. [2])

$$u(z) = \operatorname{Re}(\Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z)), z \in D^+, \quad (4)$$

где $\Phi_k(z), k = 0, 1$ – произвольные аналитические функции в D^+ такие, что $\operatorname{Im}\Phi_k(0) = 0, k = 0, 1$, причем функции $\Phi_k(z)$ однозначно определяются через функцию $u(z)$. Подставляя $u(z)$ в первое условие (3), при $f_0 \equiv 0$ получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re}(\Phi_0(rt) + (1 - r^2)\Phi_1(rt)) \right\|_{L^1(\rho_0(r))} = 0.$$

Обозначив

$$\operatorname{Re}(\Phi_0(rt) + (1 - r^2)\Phi_1(rt)) = f_{0r}(t),$$

получим $\|f_{0r}(t)\|_{L^1(\rho_0(r))} \rightarrow 0$ и

$$\Phi_0(rz) + (1 - r^2)\Phi_1(rz) = \frac{1}{2\pi i} \int_T f_{0r}(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t} + iC_{0r},$$

где C_{0r} – некоторое действительное число. Переходя к пределу $r \rightarrow 1 - 0$, для произвольного $z; |z| < 1$ получаем $\Phi_0(z) = iC_0$, где C_0 – действительное число. Из второго условия (2) получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} \left(-2r\Phi_1(rt) + (1 - r^2)t \frac{\partial \Phi_1(rt)}{\partial r} \right) \right\|_{L^1(\rho_1(r))} = 0,$$

где $\rho_1(t) = \rho_0(t)|1 - t|$. Учитывая результаты работы [4], получаем

$$-2r\Phi_1(rz) + (1 - r^2)z \frac{\partial \Phi_1(rz)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi i(1 - z)} \int_T f_{1r}(t)(1 - t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t} + iC_{1r},$$

где

$$f_{1r}(t) = \operatorname{Re} \left(-2r\Phi_1(rt) + (1 - r^2)t \frac{\partial \Phi_1(rt)}{\partial r} \right),$$

$\|f_{1r}\|_{L^1(\rho_1)} \rightarrow 0, C_{1r}$ – некоторое действительное число. Переходя к пределу, при $r \rightarrow 1 - 0$ получаем $\Phi_1(z) = iC_1$, где C_1 – некоторое действительное число. Тем самым получаем из (4) $u(z) \equiv 0$.

Скажем, что числа $\{C_k\}_0^n$ принадлежат классу $S_0(n)$, если

$$C_k = (-1)^k \overline{C_{n-k}}, k = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

Лемма 2. Пусть $\alpha > -1$. Тогда общее решение однородной задачи (1), (2) можно представить в виде

$$u(z) = \operatorname{Re}(\Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z)), z \in D^+$$

где

$$\begin{cases} \Phi_0(z) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{(1-z)^k}, \\ \Phi_1(z) = \frac{z}{2} \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial z} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{B_k}{(1-z)^k}, \end{cases} \quad (6)$$

причем числа $\{A_k\}_0^n$ принадлежат классу $S_0(n)$, а числа $\{B_k\}_0^{n+1} \in S_0(n+1)$.

Доказательство. Учитывая (4), из первого условия (2) получаем

$$\begin{aligned} & \Phi_0(rz) + (1 - r^2)\Phi_1(rz) \\ &= \frac{1}{2\pi i (1-z)^n} \int_T f_{0r}(t) (1-t)^n \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{(1-z)^k}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 1 - 0$ и учитывая, что $f_{0r} \rightarrow 0$ в $L^1(\rho_0)$, при $r \rightarrow 1 - 0$ получаем

$$\Phi_0(rz) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{(1-z)^k}.$$

Из второго условия (2) будем иметь

$$\begin{aligned} & z \frac{\partial \Phi_0(rz)}{\partial z} - 2r\Phi_1(rz) + (1 - r^2) \frac{\partial \Phi_1(rz)}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2\pi i (1-z)^{n+1}} \int_T f_{1r}(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{(1-z)^k}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, при $r \rightarrow 1 - 0$ получаем

$$z \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial z} - 2\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{B_k}{(1-z)^k}.$$

Тем самым

$$\Phi_1(z) = z \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{(1-z)^{k+1}} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{B_k}{(1-z)^k}.$$

Лемма 2 доказана.

3. Теорема 1. Пусть $\alpha \leq -1$. Тогда общее решение граничной задачи (1), (3) можно представить в виде $u(z) = \operatorname{Re}(\Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z))$, где Φ_0, Φ_1 – аналитические в D^+ функции, определяемые формулами

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^n} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{t-z} dt,$$

$$\Phi_1(z) = \frac{z}{2} \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial z} + \frac{1}{2\pi i(1-z)^{n+1}} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^{n+1}}{t-z} dt,$$

причем

$$\int_T t^k f_0(t) dt = 0, \int_T t^k f_1(t) dt = 0, k = 0, 1, \dots, n.$$

Доказательство. Так как общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(z) = \operatorname{Re}(\Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z)),$$

где Φ_0, Φ_1 – аналитические функции в D^+ , из первого условия (3) получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re}(\Phi_0(rt) + (1 - r^2)\Phi_1(rt)) - f_0(t) \right\|_{L^1(\rho_0(r))} = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует что (см. [3])

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^n} \int_T \frac{f_0(t)(1-t)^n}{t-z} dt. \quad (8)$$

Так как

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} \left(t \frac{\partial \Phi_0(rt)}{\partial r} - 2r\Phi_1(rt) + (1 - r^2)t \frac{\partial \Phi_1(rt)}{\partial r} \right) - f_1(t) \right\|_{L^1(\rho_1)} = 0,$$

то получаем

$$z \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial z} - 2r\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^{n+1}} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^{n+1}}{t-z} dt$$

и

$$\Phi_1(z) = \frac{z}{2} \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial z} - \frac{1}{2\pi i(1-z)^{n+1}} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)^{n+1}}{t-z} dt. \quad (9)$$

Следовательно, величина $u(z)$ представима в виде

$$u(z) = \operatorname{Re}(\Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z)),$$

где Φ_0, Φ_1 определяются по формулам (8), (9).

Докажем, что при любых функциях $f_0 \in L^1(\rho_0), f_1 \in L^1(\rho_1)$ $u(z)$ удовлетворяет условиям (1), (2). Действительно, так как

$$u(rt) = \operatorname{Re}(\Phi_0(rt) + (1 - r^2)\Phi_1(rt))$$

и (см. [4])

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\operatorname{Re}(\Phi_0(rt)) - f_0(t)\|_{L^1(\rho_0)} = 0,$$

то доказательство теоремы следует из следующих соотношений (см. [4]):

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r^2) \|\operatorname{Re}(\Phi_1(rt))\|_{L^1(\rho_1)} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r^2) \left\| \operatorname{Re} \left(\frac{rt}{2} \frac{\partial \Phi_0(rt)}{\partial t} \right) \right\|_{L^1(\rho_0)} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1 - r^2) \left\| \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i (1 - rt)^{n+1}} \int_T \frac{f_1(\tau)(1 - \tau)^{n+1}}{\tau - rt} d\tau \right) \right\|_{L^1(\rho_1)} = 0.$$

Аналогично устанавливается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\alpha > -1$. Тогда общее решение граничной задачи (1), (2) можно представить в виде $u(z) = \operatorname{Re}(\Phi_0(z) + (1 - |z|^2)\Phi_1(z))$, где Φ_0, Φ_1 – аналитические в D^+ функции, определяемые формулами

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i (1 - z)^n} \int_T \frac{f_0(t)(1 - t)^n}{t - z} dt + \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{(1 - z)^k},$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i (1 - z)^{n+1}} \int_T \frac{f_1(t)(1 - t)^{n+1}}{t - z} dt + z \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{(1 - z)^{k+1}} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{B_k}{(1 - z)^k},$$

где $\{A_k\}_0^n$ принадлежат классу $S_0(n)$, а $\{B_k\}_0^{n+1}$ – классу $S_0(n + 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бицадзе А.В.** Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. - М.: Наука, 1966.
2. **Tomasyan N.E.** Boundary value problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. -World Scientific Publ., Singapore, 1994.

3. **Այրապետյան Գ.Մ., Այրապետյան Մ.Ս.** Задача типа Римана-Гильберта в весовых пространствах $L^1(\rho)$ // Годичная научная конференция ГИУА,- Ереван, 2007.- №1.
4. **Այրապետյան Գ.Մ.** Задача типа Римана-Гильберта для n -голоморфных функций // Доклады РАН. Математика.-1998.- 328, №3.

Հ.Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Վ.Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆՊԻՐԸ ԵՐԿՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը կոմպլեքս հարթության միավոր շրջանում երկ-հարմոնիկ ֆունկցիաների դասի համար այն դեպքում, երբ եզրային ֆունկցիան պատկա-նում է $L_1(\rho)$ տարածությանը, որտեղ $\rho(t) = |1 - t|^\alpha$, α -ն իրական թիվ է: Ցույց է տրվում խնդրի նորմալ լուծելիությունը:

Առանցքային բաներ. Դիրիխլեի խնդիր, կշռային տարածություն, եզրային պայ-ման, երկհարմոնիկ ֆունկցիա:

H.M. HAYRAPETYAN, V.G. PETROSYAN

DIRICHLET PROBLEM FOR BIHARMONIC FUNCTIONS

In the unit disk of complex plane, the Dirichlet problem is investigated for biharmonic function classes in the case when boundary functions belong to the $L_1(\rho)$ space, where $\rho(t) = |1 - t|^\alpha$, α is a real number. The normal solvability of this problem is proved.

Keywords: Dirichlet problem, weighted space, boundary condition, biharmonic function.