

В.А. МИРЗОЯН, Г.С. МАЧКАЛЯН, А.Р. НАЗАРЯН

**О РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ
КОРАЗМЕРНОСТИ ТРИ С ДВУМЯ ГРУППАМИ ГЛАВНЫХ ВЕКТОРОВ
КРИВИЗНЫ**

В евклидовых пространствах исследуется локальная структура нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности три с одним ненулевым сингулярным главным вектором кривизны и только с одной группой регулярных главных векторов кривизны, состоящей из двух линейно независимых векторов.

Ключевые слова: риччи-полусимметрические подмногообразия, полуэйнштейновы подмногообразия, прямые произведения, цилиндр, конус.

Римановы риччи-полусимметрические многообразия, характеризуемые полупараллельностью тензора Риччи, являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых и полусимметрических многообразий (см. [1]). Они исчерпываются, в основном, произведениями эйнштейновых и полуэйнштейновых многообразий [2]. Примерами полуэйнштейновых многообразий являются конусы над эйнштейновыми многообразиями [3].

Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности три в евклидовом пространстве E_n . Допустим, что M имеет только две группы главных векторов кривизны (г.в.к.): $W^{(1)}$ и $W^{(0)}$, где $W^{(1)}$ состоит только из двух неколлинеарных г.в.к. n_1 и n_2 с кратностями $p_1 \geq 2, p_2 \geq 2$, а $W^{(0)}$ содержит только один ненулевой сингулярный г.в.к. n_3 с кратностью $p_3 = 1$.

Пусть $T_x^{(n_1)}, T_x^{(n_2)}, T_x^{(n_3)}$ – собственные подпространства в касательном пространстве $T_x(M)$, соответствующие г.в.к. n_1, n_2 и n_3 . Тогда $T_x^{(n_1)} + T_x^{(n_2)} = T_x^{(1)}, T_x^{(n_3)} + T_x' = T_x^{(0)}$, где T_x' – собственное подпространство, соответствующее нулевому г.в.к.

Пусть индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k, \dots = 1, \dots, m, i_1, j_1 = 1, \dots, p_1, i_2, j_2 = p_1 + 1, \dots, p_1 + p_2, i_3, j_3 = p_1 + p_2 + 1 \\ = p, r, s, t = p_1 + p_2 + 2, \dots, m, \alpha, \beta = m + 1, m + 2, m + 3.$$

Предположим, что ортонормрепер $\{x, e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}, e_{m+3}\}$ выбран так, что $e_{i_1} \in T_x^{(n_1)}, e_{i_2} \in T_x^{(n_2)}, e_p \in T_x^{(n_3)}$. Тогда на подмногообразии M выполняются следующие соотношения:

$$\omega^\alpha = 0, \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \quad (1)$$

$$\delta_{ij} \lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha + (d\lambda_i^\alpha) \delta_{ij} + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k. \quad (2)$$

С учетом принятых обозначений можем написать: $\lambda_{i_1}^\alpha = \lambda_{(1)}^\alpha, \lambda_{i_2}^\alpha = \lambda_{(2)}^\alpha, \lambda_p^\alpha = \lambda_{(3)}^\alpha, \lambda_r^\alpha = 0$. Так как $n_1, n_2 \in W^{(1)}$, то $\langle n_1 - n_2; n_1 + n_2 - H \rangle = 0$. Имея в виду, что $H = p_1 n_1 + p_2 n_2 + n_3$, $n_1 \perp n_3, n_2 \perp n_3$, получим

$$\langle n_1 - n_2, (p_1 - 1)n_1 + (p_2 - 1)n_2 \rangle = 0.$$

Следовательно, нормальные векторы $e_{m+1}, e_{m+2}, e_{m+3}$ можно выбрать так, что $e_{m+1} \parallel n_1 - n_2, e_{m+2} \parallel (p_1 - 1)n_1 + (p_2 - 1)n_2, e_{m+3} \parallel n_3$.

Поскольку

$$n_1 = \lambda_{(1)}^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{(1)}^{m+2} e_{m+2} + \lambda_{(1)}^{m+3} e_{m+3},$$

$$n_2 = \lambda_{(2)}^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{(2)}^{m+2} e_{m+2} + \lambda_{(2)}^{m+3} e_{m+3},$$

$$n_3 = \lambda_{(3)}^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{(3)}^{m+2} e_{m+2} + \lambda_{(3)}^{m+3} e_{m+3},$$

то, учитывая выбор векторов $e_{m+1}, e_{m+2}, e_{m+3}$, будем иметь

$$\lambda_{(3)}^{m+1} = \lambda_{(3)}^{m+3} = \lambda_{(1)}^{m+3} = \lambda_{(2)}^{m+3} = 0, \lambda_{(1)}^{m+2} = \lambda_{(2)}^{m+2},$$

$$\lambda_{(1)}^{m+3} = \lambda_{(2)}^{m+3}, \lambda_{(2)}^{m+1} = -\frac{p_1 - 1}{p_2 - 1} \lambda_{(1)}^{m+1}.$$

Таким образом, для г.в.к. n_1, n_2 и n_3 получим следующие формулы:

$$\begin{cases} n_1 = \lambda_{(1)}^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{(1)}^{m+2} e_{m+2}, \\ n_2 = -\frac{p_1 - 1}{p_2 - 1} \lambda_{(1)}^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{(1)}^{m+2} e_{m+2}, \\ n_3 = \lambda_{(3)}^{m+3} e_{m+3}. \end{cases} \quad (3)$$

Из (1) следует, что $\omega_{i_1}^{m+3} = \omega_{i_2}^{m+3} = \omega_p^{m+1} = \omega_p^{m+2} = \omega_r^\alpha = 0$.

Придавая в формуле (2) индексам различные значения, можем получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h_{rsk}^\alpha &= h_{i_1 j_1 k}^\alpha = h_{i_2 j_2 k}^\alpha = h_{r j_1 j_1}^{m+3} = h_{r j_1 j_2}^{m+3} = h_{r j_1 p}^{m+3} = h_{r j_2 j_2}^{m+3} = h_{r j_2 p}^{m+3} = h_{r p k}^{m+1} = \\ &= h_{r p k}^{m+2} = h_{i_1 j_1 k}^\alpha = h_{i_1 i_1 j_2}^{m+3} = h_{i_1 j_2 j_2}^{m+3} = h_{i_1 j_2 p}^{m+3} = h_{i_1 j_2 s}^{m+3} = h_{i_1 i_1 j_2}^{m+2} = h_{i_1 j_2 j_2}^{m+2} = h_{i_1 j_2 p}^{m+2} = \\ &= h_{i_1 j_2 s}^{m+2} = h_{i_1 i_1 i_1}^\alpha = h_{i_2 i_2 i_2}^\alpha = h_{p j_1 j_2}^{m+1} = h_{r j_1 j_2}^{m+1} = h_{p p j_1}^{m+1} = h_{p p j_2}^{m+1} = h_{p j_2 p}^{m+2} = h_{p j_2 p}^{m+3} = \\ &= h_{p j_1 p}^{m+2} = h_{p j_1 p}^{m+3} = h_{i_1 i_1 j_2}^{m+1} = h_{i_2 i_2 j_1}^{m+1} = h_{p p p}^{m+1} = 0, i_1 \neq j_1, i_2 \neq j_2. \end{aligned}$$

Кроме этих соотношений, получается некоторая дифференциальная система, которая при помощи обозначений

$$\begin{aligned} A &= \frac{h_{p j_1 j_1}^{m+1}}{\lambda_{(1)}^{m+1}} = \frac{h_{p j_1 j_1}^{m+2}}{\lambda_{(1)}^{m+2}} = -\frac{h_{p j_1 j_1}^{m+3}}{\lambda_{(3)}^{m+3}} = -\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} \frac{h_{p j_2 j_2}^{m+1}}{\lambda_{(1)}^{m+1}} = \frac{h_{p j_2 j_2}^{m+2}}{\lambda_{(1)}^{m+2}} = -\frac{h_{p j_2 j_2}^{m+3}}{\lambda_{(3)}^{m+3}}, \\ F_r &= -\frac{h_{r j_1 j_1}^{m+1}}{\lambda_{(1)}^{m+1}} = \frac{h_{r j_1 j_1}^{m+2}}{\lambda_{(1)}^{m+2}} = -\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} \frac{h_{r j_2 j_2}^{m+1}}{\lambda_{(1)}^{m+1}} = \frac{h_{r j_2 j_2}^{m+2}}{\lambda_{(1)}^{m+2}}, \end{aligned}$$

$$D = \frac{h_{ppp}^{m+3}}{\lambda_{(3)}^{m+3}}, C = \frac{h_{ppp}^{m+2}}{\lambda_{(3)}^{m+3}}, F_r^{(3)} = \frac{h_{rpp}^{m+3}}{\lambda_{(3)}^{m+3}}$$

сводится к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\ln|\lambda_{(1)}^{m+1}| = A\omega^p + F_s\omega^s, \\ d\ln|\lambda_{(1)}^{m+2}| = A\omega^p + F_s\omega^s, \\ d\ln|\lambda_{(3)}^{m+3}| = D\omega^p + F_s^{(3)}\omega^s, \\ \omega_{j_1}^{j_2} = 0, \\ \omega_{j_1}^p = A\omega^{j_1}, \\ \omega_{j_2}^p = A\omega^{j_2}, \\ \omega_{m+1}^{m+2} = 0, \\ \omega_{m+1}^{m+3} = 0, \\ \omega_{m+2}^{m+3} = -C\omega^p, \\ \omega_{j_1}^r = F_r\omega^{j_1}, \\ \omega_{j_2}^r = F_r\omega^{j_2}, \\ \omega_p^r = F_r^{(3)}\omega^p, \\ \omega_{i_1}^{m+3} = \omega_{i_2}^{m+3} = \omega_p^{m+1} = \omega_p^{m+2} = \omega_r^\alpha = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Используя уравнения системы (4), нетрудно доказать, что распределения $T_x^{(n_1)}, T_x^{(n_2)}, T_x^{(n_3)}, T_x', T_x^{(1)}, T_x^{(0)}$ интегрируемы. Интегральные многообразия распределений $T_x^{(n_1)}, T_x^{(n_2)}$ являются сферами размерностей p_1, p_2 ; интегральные многообразия распределений $T_x^{(n_3)}$ и T_x' - некоторой кривой (но не прямой, поскольку $\lambda_{(3)}^{m+3} \neq 0$) и плоскостью размерности $m - p_1 - p_2 - 1$; интегральное многообразие распределения $T_x^{(0)}$ - локально евклидовым подмногообразием, которая представляет собой огибающую однопараметрического семейства $(m - p_1 - p_2 - 1)$ -мерных плоскостей; интегральное многообразие распределения $T_x^{(1)}$ - прямым произведением двух сфер, которое представляет собой вполне омбилическое подмногообразие в M . Таким образом, подмногообразие M , как риманово многообразие, удовлетворяет условиям следующей теоремы (см. [3]).

Пусть $\tilde{M}$ - m -мерное риманово многообразие с индексом дефектности $\mu \neq 0$ и интегрируемым распределением кодефектности $T^{(1)}$. Если его интегральное многообразие $M^{(1)}$ является вполне омбилическим в $\tilde{M}$, то $\tilde{M}$ локально изометрично или цилиндру над $M^{(1)}$, или цилиндру с $(\mu - 1)$ -мерным образующим над конусом, построенным над $M^{(1)}$. Более того, $\tilde{M}$ полуэйнштейново либо риччи-плоское тогда и только тогда, когда $M^{(1)}$ эйнштейново; если $M^{(1)}$ эйнштейново с константой $\lambda \leq 0$, то $\tilde{M}$ полуэйнштейново, если же $\lambda > 0$, то $\tilde{M}$ или полуэйнштейново, или риччи-плоское.

В ходе доказательства этой теоремы (см. [3]) доказано, что метрика на $\tilde{M}$ при выполнении условий теоремы может быть приведена к виду

$$ds^2 = \sum_{\delta} (dx^{\delta})^2 + (x^1)^2 d\tilde{s}^2, \quad (5)$$

где $d\tilde{s}^2$ – метрика на $M^{(1)}$, а первое слагаемое правой части представляет метрику на интегральном многообразии распределения $T^{(0)}$.

Возвращаясь к подмногообразию M , можем сказать, что его метрика может быть приведена к виду (5), где $d\tilde{s}^2$ – метрика интегрального многообразия $\bar{M}$ распределения $T_x^{(1)}$, а первое слагаемое правой части в этом случае является метрикой интегрального многообразия распределения $T^{(0)}$, которое представляет собой огибающую однопараметрического семейства $(m - p_1 - p_2 - 1)$ -мерных плоскостей и, следовательно, является локально евклидовым. Таким образом M изометрично или цилиндру с $(m - p_1 - p_2 - 1)$ -мерным образующим над $\bar{M}$, или конусу над $\bar{M}$, или прямому произведению цилиндра над конусом над $\bar{M}$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности три в евклидовом пространстве E_n и допускает только две группы г.в.к. $W^{(1)}$ и $W^{(0)}$, где $W^{(1)}$ состоит только из двух неколлинеарных г.в.к. n_1 и n_2 с кратностями $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$, а $W^{(0)}$ содержит только один ненулевой сингулярный г.в.к. n_3 с кратностью $p_3 = 1$. Тогда M изометрично или цилиндру с локально евклидовыми образующими над прямым произведением двух сфер, или конусу над прямым произведением двух сфер, или прямому произведению цилиндра с локально евклидовыми образующими над конусом над прямым произведением двух сфер. Во всех трех случаях прямое произведение сфер образует эйнштейново многообразие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lumiste Ü. Semiparallelsbmanifolds in space forms.- New York: Springer, 2009.-306 p.
2. Мирзоян В.А. Структурные теоремы для римановых Ric -полусимметрических пространств // Изв. Вузов. Математика. -1992. -№6. – С. 80-89.
3. Мирзоян В.А. Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric -полупараллельных подмногообразий // Изв. РАН. Сер. Матем. - 2003. - 67, №5. – С. 107-124.

Վ.Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, Գ.Ս. ՄԱՉԿԱԼՅԱՆ, Ա.Ռ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

**ԵՐԵՔ ԿՈԶԱՓԱՆԻ ԵՎ ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ԳԼԽԱՎՈՐ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԵՐԿՈՒ ԽՈՒՄԲ
ՈՒՆԵՑՈՂ ՐԻԶՉԻ - ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՋԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ՄԱՍԻՆ**

Էվկլիդեսյան տարածություններում հետազոտվում է երեք կոչափանի նորմալ հարթ լիջի – կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների լոկալ կառուցվածքը, որն ունի մեկ ոչ զրոյական սինգուլյար կորության գլխավոր վեկտոր և ռեգուլյար կորության գլխավոր վեկտորների մեկ խումբ՝ կազմված երկու գծորեն անկախ վեկտորներից:

Առանցքային բառեր. լիջի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ, ուղիղ արտադրյալներ, գլան, կոն:

V.A. MIRZOYAN, G.S. MACHKALYAN, A.R. NAZARYAN

**ON RICCI-SEMI-SYMETRIC SUBMANIFOLDS CODIMENSIONALITY THREE
WITH TWO GROUPS OF PRINCIPAL CURVATURE VECTORS**

In Euclidean space, the local structure of normally flat Ricci-semi-symmetric submanifolds of codimensionality three with one non zero singular principal curvature vectors and only with one group of regular principal curvature vectors consisting of two linearly independent vectors is investigated.

Keywords: Ricci-semi-symmetric submanifolds, semi-Einstein submanifolds, direct products, cylinder, cone.

UDC 517.958

A.O. BABAYAN, M.H. MOHAMMADI

THE MATHEMATICAL MODELLING OF THE GARNISSAGE FURNACE

A mathematical model for glass melting in the garnissage furnace is obtained. It is supposed that the considered domain has cylindrical symmetry and therefore the problem can be reduced to a two-dimensional model.

Keywords: Navier-Stokes equation, continuity equation, energy conservation law, Stefan condition, Dirichlet condition, boundary value problem.

In the paper, a mathematical model for the glass melting process in the electric garnissage [1] furnace is obtained. The schematic cut of the furnace is presented in Fig. 1.