

С.Г. ХАЧАТРЯН, Л.Г. МИНАСЯН

**СИНТЕЗ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В
ЗОНАЛЬНОМ КОДИРОВАНИИ ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ**

Синтезированы зависящие от изображения дискретные ортогональные преобразования различных размерностей. Приведен алгоритм зонального кодирования цифровых изображений с применением синтезированных преобразований.

Ключевые слова: ортогональное преобразование, сингулярное разложение, зональное кодирование, дискретное косинусное преобразование, цифровое изображение.

Введение. Кодирование изображений с применением дискретных преобразований осуществляется с учетом распределения яркости в спектральных составляющих. Поэтому удобнее кодировать спектр, чем исходное изображение [1-3]. Дискретные преобразования применяются к дискретным сигналам с целью выделения коэффициентов спектра, несущих основную энергию сигнала. Затем сигнал заменяется его приближением, содержащим только те составляющие в разложении сигнала по базисным функциям, в коэффициентах которых содержится основная энергия.

Наилучшим дискретным преобразованием является преобразование Корунена-Лоэва [2], применение которого приводит к полной декорреляции обрабатываемой матрицы. Однако преобразование Корунена-Лоэва не имеет быстрого преобразования. Кроме того, для восстановления изображения, закодированного с применением преобразования Корунена-Лоэва, вместе с кодом необходимо сохранить и преобразование, что увеличивает размер сохраняемой информации. Поэтому его применение в практических целях нецелесообразно.

Среди дискретных преобразований, которые имеют быстрые алгоритмы вычислений, оптимальное приближение к преобразованию Корунена-Лоэва дает дискретное косинусное преобразование (ДКП) [4, 5]. Поэтому ДКП легло в основу стандарта JPEG [6]. Среди других дискретных преобразований, нашедших практическое применение при сжатии данных в цифровой обработке изображений (ЦОИ), следует отметить также *наклонное* (slant) преобразование [1, 8 - 11], преобразование Уолша [1, 7, 11 - 13], преобразование Хаара [1, 7, 14], которые, уступая ДКП в способности локализации энергии в спектре, требуют для своей реализации значительно меньших вычислительных затрат. Все перечисленные преобразования, кроме преобразования Корунена-Лоэва, независимы от обрабатываемого изображения.

В данной статье синтезированы зависящие от изображения дискретные ортогональные преобразования, которые в частном случае совпадают с преобразованием Корунена-Лоэва и приводят к сингулярному разложению матрицы изобраа-

жения [15]. Синтезированные преобразования применяются в зональном кодировании цифровых изображений.

Приведем сначала алгоритм зонального кодирования изображения, т.е. алгоритм восстановления изображения из части своего спектра.

Опишем обработку одного блока изображения размерности $k \times k$, $k = 2^n$, $n \geq 3$ (случаи $n = 1, 2$ рассматривать нецелесообразно). Пусть M - блок размерности $k \times k$ матрицы изображения, а T_1 и T_2 - ортогональные матрицы размерности $k \times k$.

Шаг 1. К поступающему блоку M матрицы изображения применяется дискретное двумерное преобразование, в результате чего получается спектральная матрица $B = T_1 M T_2$:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \cdots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \cdots & b_{3k} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & \cdots & b_{4k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & b_{k4} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Шаг 2. Из полученной спектральной матрицы выделяется часть размерности $r \times r$ ($r < k$) (которая находится в ее верхнем левом углу), а остальные элементы обнуляются. В результате получается матрица

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1,r} & b_{2,r} & \cdots & b_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Шаг 3. К полученному блоку $\tilde{S}$ спектральной матрицы изображения применяется обратное дискретное двумерное преобразование:

$$\tilde{A} = T_1^T \tilde{S} T_2^T,$$

где T_1^T и T_2^T - матрицы, транспонированные к T_1 и T_2 .

На рис. 1 приведена блок-схема алгоритма обработки одного блока изображения с применением ортогонального преобразования, где используются обозначения: ДОП –

дискретное ортогональное преобразование, ОДОП – обратное дискретное ортогональное преобразование.



Рис. 1. Блок-схема алгоритма обработки одного блока изображения

Синтез и применение ортогонального преобразования. Пусть A - матрица значений распределения яркостей в блоке изображения размерности $N \times N$ ($N = 2^n, n \geq 3$). Элементы матрицы A принимают целые значения в пределах от 0 до 255.

Обозначим через A_k^d матрицу

$$A_k^d = \begin{bmatrix} a_{1d \cdot k+1} & a_{1d \cdot k+2} & \cdots & a_{1d \cdot k+k} \\ a_{2d \cdot k+1} & a_{2d \cdot k+2} & \cdots & a_{2d \cdot k+k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{Nd \cdot k+1} & a_{Nd \cdot k+2} & \cdots & a_{Nd \cdot k+k} \end{bmatrix}, \quad d = 0, 1, \dots, \frac{N}{k} - 1.$$

Пусть $A_k = \sum_{d=0}^{\frac{N}{k}-1} (A_k^d)^T A_k^d$, где $(A_k^d)^T$ - матрица, транспонированная к A_k^d .

Обозначим через U матрицу, столбцы которой совпадают с нормированными собственными векторами матрицы A_k и расположены в порядке убывания собственных значений. Заменяя A на A^T и повторяя описанное выше аналогично к U , построим матрицу V .

Разобьем матрицу A на блоки размерности $k \times k$. Пусть M - один из таких блоков и S - спектральная матрица этого блока изображения, полученная формулой

$$S = U^T \cdot M \cdot V, \quad (3)$$

где U^T - матрица, транспонированная к U .

Из формулы (3) получим

$$M = U \cdot S \cdot V^T. \quad (4)$$

В случае, когда $k = N$, формула (4) совпадает с сингулярным разложением матрицы A [15].

На рис. 2а приведен пример такого разложения для изображения 'Lena' размерности 512×512 , на рис. 2б - спектр изображения - сингулярное разложение матрицы изображения, на рис. 2в - сингулярные разложения блоков размерности 128×128 изображения и на рис. 2г - восстановленное из 2б изображение. При этом восстановленное изображение почти не отличается от исходного.

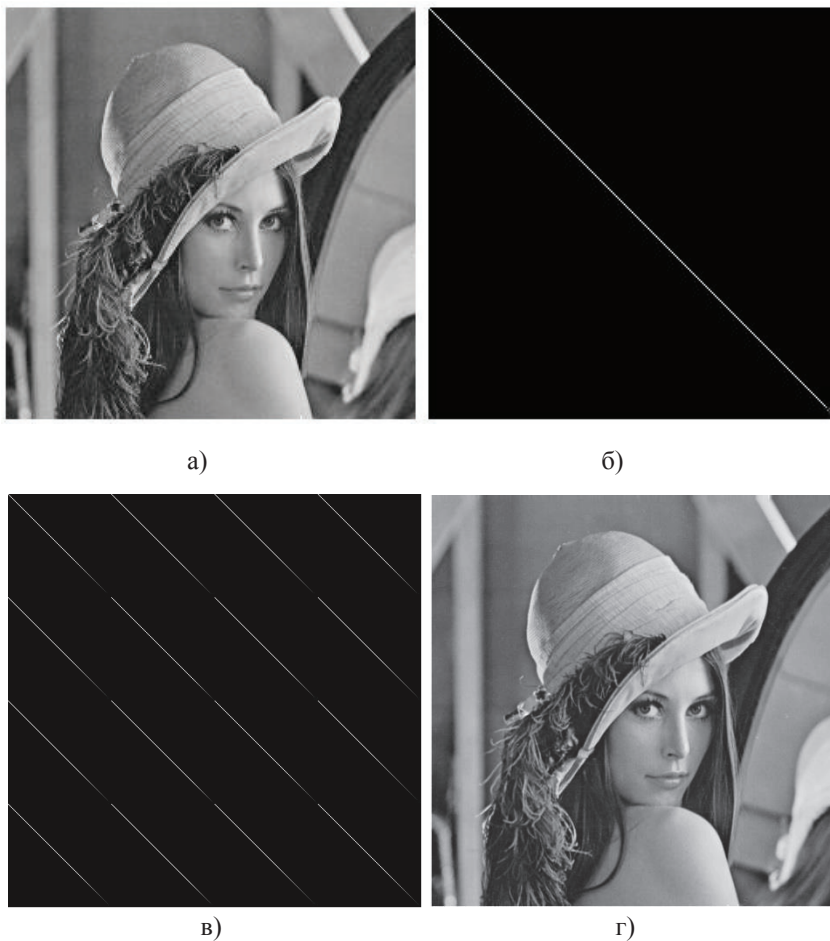


Рис. 2

На рис. 3а,б,в приведены двумерный спектр изображения 'Lena' полученный применением двумерного дискретного косинусного преобразования, спектр после квантизации, где в спектре каждого блока оставлена $\frac{1}{4}$ часть (остальные элементы обнулены), а также восстановленное из оной четвертой части спектра изображение.

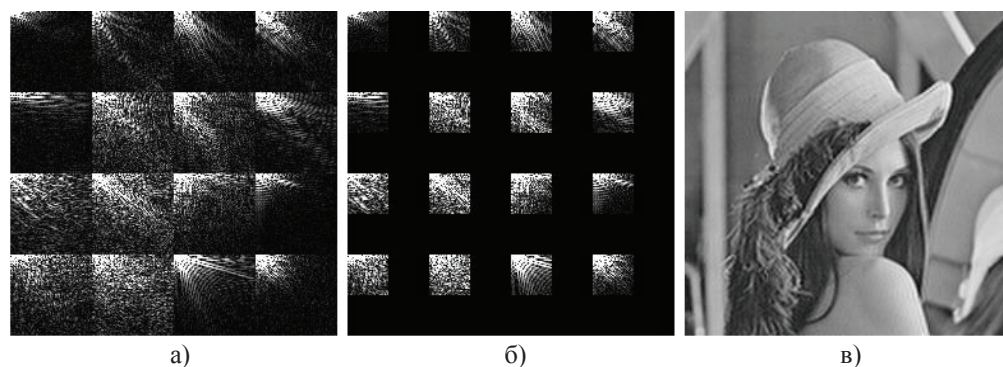


Рис. 3

На рис. 4а,б,в приведены двумерный спектр изображения 'Lena', полученный применением предлагаемого преобразования, спектр после квантизации, где в спектре каждого блока оставлена $\frac{1}{4}$ часть (остальные элементы обнулены), а также восстановленное из оной четвертой части спектра изображение.

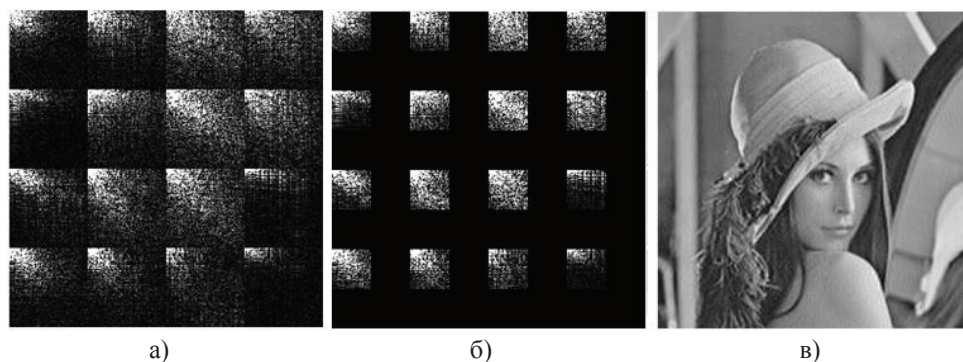


Рис. 4

В таблице приведены результаты зонального кодирования для некоторых тестовых изображений с применением предлагаемого и dct2 преобразований для блоков различных размерностей.

Таблица

Изображение	Преобразование					
	dct2	Prop. Trans	dct2	Prop. Trans	dct2	Prop. Trans
	Size of block = 8		Size of block = 32		Size of block = 128	
cameraman256	26.73	26.86	27.28	27.77	27.42	31.23
Lena256	29.46	29.47	29.91	30.14	30.06	32.60
Lena512	34.72	34.74	35.73	35.82	35.95	36.77
Barbara	25.66	26.54	25.68	27.53	25.69	29.57

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andrews H.C., Pratt W.K.* Transform image coding // Proc. Computer processing in communications. - New York: Polytechnic Press, 1969. - P. 63-84.
2. *Ахмед Н., РАО К.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. - М.: Связь, 1980. - 248 с.
3. **Оппенгейм Э.** Применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. / Под ред. Э.Оппенгейма. – М.: Мир, 1980. - 552 с.
4. *Ahmed N., Natarajan T., Rao K.R.* On image processing and a discrete cosine transform // IEEE Trans. Computers. -1974. - V. C-23, №1. - P.90-93.
5. *Rao K.R., Yip P.* Discrete cosine transform - algorithms, advantages, applications. – London: Academic Press inc., 1990.
6. *Wallace G.K.* The JPEG algorithm for image compression standard // Communications of the ACM. – 1991.- V.34, №4. - P. 30-44.
7. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. - М.: Мир, 1982. -Т.1. - 312 с.; Т.2. - 480 с.
8. *Enomoto H., Shibata K.* Orthogonal transform coding system for television signals // IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility. - 1971. - Special issue on Walsh functions. - V. EMC-13, №3. - P. 11-17.
9. *Pratt W.K., Chen W.H., Welch L.R.* Slant transform image coding // IEEE Trans. Commun. -1974. -V. COM-22. – P.1075-1093.
10. *Задирака В.К., Евтушенко В.Н.* Оптимальный способ зонного кодирования с использованием Слэнт- преобразования // Кибернетика и системный анализ. - 1994. – №4. - С. 56-60.
11. *Прэтт У., Кэйн Д., Эндрюс Х.* Кодирование изображений посредством преобразования Адамара // ТИИЭР. - 1969. - Т.57, №1. - С. 66-77.
12. *Pratt W.K., Andrews H.C.* Application of Fourier-Hadamard transformation to bandwidth compression // Picture bandwidth compression / Ed.: T.S.Huang, O.J.Tretiak. - New York: Gordong and Breach, 1972. - P. 515-554.
13. *Woods J.W., Huang T.S.* Picture bandwidth compression by linear transformation and block quantization // Picture bandwidth compression / Ed.: T.S.Huang, O.J.Tretiak. - New York: Gordong and Breach, 1972. - P.555-573.
14. *Rao K.R., Narasimhan M.A., Revuluri K.* Image data processing by Hadamard-Haar transform // IEEE Trans. Computers. - 1975. - V. C-23, №9. - P. 888-896.
15. **Форсайт Дж., Молер К.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. - М.: Мир, 1969. -167 с.

Ս.Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Լ.Գ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՍԻՆԹԵԶՈՒՄԸ ԵՎ ԴՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ
ԹՎԱՅԻՆ ՊԱՏԿԵՐԻ ԶՈՆԱԼ ԿՈԴԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵՋ

Սինթեզված են պատկերից կախված տարբեր չափերի օրթոգոնալ ձևափոխություններ: Սինթեզված ձևափոխության կիրառմամբ ներկայացված է թվային պատկերների զոնալ կոդավորման ալգորիթմ:

Առանցքային բառեր. օրթոգոնալ ձևափոխություն, սինգուլյար վերլուծություն, զոնալ կոդավորում, դիսկրետ կոսինուսային ձևափոխություն, թվային պատկեր:

S.H. KHACHATRYAN, L.G. MINASYAN

SYNTHESIS OF ORTHOGONAL TRANSFORMATION AND ITS
APPLICATION IN ZONAL CODING OF DIGITAL IMAGE

The image-dependent discrete orthogonal transformations of different dimensions are synthesized. The algorithm of zonal coding of digital images, using the synthesized transformations are presented.

Keywords: orthogonal transform, singular value decomposition, zonal coding, discrete cosine transform, digital image.

УДК 51.4

Ա.Դ. ԱՐԱԿԵԼՅԱՆ

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЧИСЛА КРУГОВ КОВРА АПОЛЛОНИЯ

Ковер Аполлония - элегантная упаковка касающихся окружностей (кругов), построение которого получается путем повторного вписывания кругов в треугольные промежутки в конфигурациях четырех попарно касающихся окружностей. Для фиксированного ковра возникает естественный вопрос: как быстро радиусы кругов стремятся к нулю, или, что то же самое, чему равняется общее число кругов с ограниченными кривизнами? Предлагается асимптотический результат для этого числа.

Ключевые слова: ковер Аполлония, упаковка окружностей, размерность Хаусдорфа.

Ковер Аполлония - одна из самых красивых упаковок касающихся окружностей (кругов), построение которого может быть описано простым способом на основе древней задачи Аполлония Пергского (для заданных трех окружностей на плоскости можно построить ровно две окружности, касающиеся всех трех). Построение аполлониевой упаковки начинаем с четырех попарно касающихся окружностей на плоскости, добавляя новые окружности, касающиеся всевозможных троек предыдущих окружностей, согласно задаче Аполлония. Продолжая этот процесс до бесконечности, приходим к упаковке бесконечно многих окружностей, называемой ковром Аполлония (рис. 1).