

Ս.Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Լ.Գ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՍԻՆԹԵԶՈՒՄԸ ԵՎ ԴՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ
ԹՎԱՅԻՆ ՊԱՏԿԵՐԻ ԶՈՆԱԼ ԿՈԴԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵՋ

Սինթեզված են պատկերից կախված տարբեր չափերի օրթոգոնալ ձևափոխություններ: Սինթեզված ձևափոխության կիրառմամբ ներկայացված է թվային պատկերների զոնալ կոդավորման ալգորիթմ:

Առանցքային բառեր. օրթոգոնալ ձևափոխություն, սինգուլյար վերլուծություն, զոնալ կոդավորում, դիսկրետ կոսինուսային ձևափոխություն, թվային պատկեր:

S.H. KHACHATRYAN, L.G. MINASYAN

SYNTHESIS OF ORTHOGONAL TRANSFORMATION AND ITS
APPLICATION IN ZONAL CODING OF DIGITAL IMAGE

The image-dependent discrete orthogonal transformations of different dimensions are synthesized. The algorithm of zonal coding of digital images, using the synthesized transformations are presented.

Keywords: orthogonal transform, singular value decomposition, zonal coding, discrete cosine transform, digital image.

УДК 51.4

Ա.Դ. ԱՐԱԿԵԼՅԱՆ

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЧИСЛА КРУГОВ КОВРА АПОЛЛОНИЯ

Ковер Аполлония - элегантная упаковка касающихся окружностей (кругов), построение которого получается путем повторного вписывания кругов в треугольные промежутки в конфигурациях четырех попарно касающихся окружностей. Для фиксированного ковра возникает естественный вопрос: как быстро радиусы кругов стремятся к нулю, или, что то же самое, чему равняется общее число кругов с ограниченными кривизнами? Предлагается асимптотический результат для этого числа.

Ключевые слова: ковер Аполлония, упаковка окружностей, размерность Хаусдорфа.

Ковер Аполлония - одна из самых красивых упаковок касающихся окружностей (кругов), построение которого может быть описано простым способом на основе древней задачи Аполлония Пергского (для заданных трех окружностей на плоскости можно построить ровно две окружности, касающиеся всех трех). Построение аполлониевой упаковки начинаем с четырех попарно касающихся окружностей на плоскости, добавляя новые окружности, касающиеся всевозможных троек предыдущих окружностей, согласно задаче Аполлония. Продолжая этот процесс до бесконечности, приходим к упаковке бесконечно многих окружностей, называемой ковром Аполлония (рис. 1).

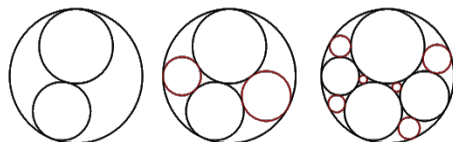


Рис. 1. Построение ковра Аполлония

Ясно, что в зависимости от исходной конфигурации кругов ковер Аполлония может принимать четыре различные формы (рис. 2).



Рис. 2. Ковры Аполлония

Рассмотрим ограниченные ковры (рис. 3), где числа внутри кругов есть их кривизны. Ковры Аполлония можно изучать с разных углов. Различные свойства таких упаковок исследованы в красивой серии работ Грэхэма, Лагариаса и др. [1,2]. Ковры Аполлония представляют интерес в классической геометрии и в теории чисел. Например, процесс получения новой окружности на n -й стадии на самом деле эквивалентен нахождению образа инверсного отражения одной из окружностей, рожденной на стадии $n-1$. Можно также заметить свойство “целочисленности” аполлониевых ковров [3]: если кривизны окружностей в исходной декартовой конфигурации - целые числа, то кривизны всех остальных окружностей на ковре Аполлония - также целые числа. Свойство целочисленности и существования бесконечного числа таких ковров делает их интересными и с теоретико-числовой точки зрения. На рис. 3 приведен пример целочисленного ковра, порожденного исходными окружностями с кривизнами $(1, 2, 2, 3)$.

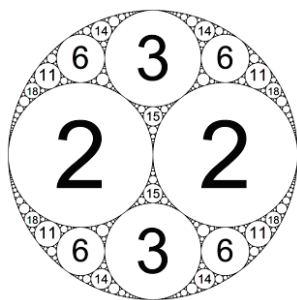


Рис. 3. Целочисленный ковер Аполлония, порожденный декартовой конфигурацией с кривизнами окружностей $(1, 2, 2, 3)$.

Легко заметить, что последовательность кривизин $\{b_n = 1/r_n\}$ стремится к бесконечности, или, что то же самое, последовательность радиусов $\{r_n\}$ стремится к нулю, так

как общая площадь непересекающихся внутренних кругов $\sum \pi r_n^2$ дает площадь ограничивающего круга. Возникает естественный вопрос: как быстро растет последовательность $\{b_n\}$, или, что то же самое, как быстро радиусы $\{r_n\}$ стремятся к нулю? Введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathcal{A}$ - фиксированный ковер Аполлония. Для заданного числа $T > 0$ обозначим через $N_{\mathcal{A}}(T)$ число кругов с радиусами меньше, чем T :

$$N_{\mathcal{A}}(T) := \#\{C \in \mathcal{A} \mid b(C) < T\}. \quad (1)$$

Ясно, что $N_{\mathcal{A}}(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$. Для изучения этого количества введем функцию

$$L_{\mathcal{A}}(s) = \sum_{C \in \mathcal{A}} \frac{1}{b^s(C)} = \sum_{C \in \mathcal{A}} r^s(C). \quad (2)$$

Из сходимости ряда $\sum \pi r^2(C)$ следует сходимость ряда $L_{\mathcal{A}}(s)$ для $\operatorname{Re} s \geq 2$, т.е. ряд имеет некую абсциссу сходимости δ , такую, что $L_{\mathcal{A}}(s)$ сходится при $\operatorname{Re} s > \delta$ и расходится при $\operatorname{Re} s < \delta$. Из соотношения (2) следует, что δ есть *размерность Хаусдорфа* предельного множества ковра $\mathcal{A}$ (т.е. замыкание объединения кругов). Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

Лемма 1. Для размерности Хаусдорфа ковра $\mathcal{A}$ имеет место

$$\delta = \inf \left\{ s > 0 : \sum_{C \in \mathcal{A}} \frac{1}{b^s(C)} < \infty \right\}.$$

Хотя, на первый взгляд, различные выборы начальных кругов приводят к разным и не похожим друг на друга коврам. Тем не менее все получаемые картины в определенном смысле эквивалентны. Более того, любой ковер Аполлония преобразованием Мебиуса (конформные отображения комплексной плоскости, переводящие точку $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$, $ad - bc = 1$) может быть отображен на любой другой. Тем самым δ - универсальная константа.

Лемма 2. Значение δ инвариантно относительно ковров Аполлония.

К сожалению, точного значения для δ до сих пор нет, а построение оценок значения δ довольно трудно. Первые грубые оценки были получены Бойдом [4], который получил $1,300197 < \delta < 1,314534$. Наиболее известной является оценка МакМюллена $\delta = 1,30568$ [5]. Для улучшения этих оценок получены следующие асимптотические выражения для $N_{\mathcal{A}}(T)$.

Теорема. Для $N_{\mathcal{A}}(T)$ справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\mathcal{A}}(T)}{\log T} = \delta,$$

более того, существует число $C_A > 0$ такое, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_A(T)}{T^\delta} = C_A,$$

т.е. $N_A(T) \sim C_A \cdot T^\delta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lagarias J.C., Mallows C.L., Wilks A.R.** Beyond the Descartes Circle Theorem // American Mathematical Monthly.- 2002.- 109(4).- P. 338-361.
2. **Graham R.L., Lagarias J.C., Mallows C.L., Wilks A.R., Yan C.H.** Apollonian Circle Packings: Number Theory // Journal of Number Theory.- 2003.- 100.- P. 1-45.
3. **Sarnak P.** Integral Apollonian packings // Amer. Math. Monthly.- 2011.- 118, N 4.- P. 291-306.
4. **Boyd D.W.** The residual set dimension of the Apollonian packing // Mathematika.- 1973.- 20.- P. 170-174.
5. **McMullen C.T.** Hausdorff dimension and conformal dynamics. III. Computation of dimension // Amer. J. Math.-1998.- 120, N4.- P.691-721.

Ա.Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ԱՊՈԼԼՈՆՅԱՆ ԳՈՐԳԵՐՈՒՄ ՇՐՋԱՆՆԵՐԻ ԹՎԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ապոլլոնյան գորգերը շրջանների փաթեթների կառուցումներ են, որոնք ստացվում են միմյանց զույգ առ զույգ շրջափող չորս շրջանների կոնֆիգուրացիաների կորագիծ եռանկյուններում շրջանների հաջորդաբար ներգծումով: Ֆիքսված ապոլլոնյան գորգի դեպքում բնական հարց է ծագում, թե որքան արագ են շրջանների շառավիղները ձգտում գրոյի, կամ, որ նույնն է, որքան է սահմանափակ կորությամբ շրջանների ընդհանուր թիվը: Ներկայացվում է այդ թվի համար ստացված ասիմպտոտիկ արդյունքը:

Առանցքայի բառեր. ապոլլոնյան գորգեր, շրջանների փաթեթներ, հաուսդորֆյան չափողականություն:

A.H. ARAKELYAN

THE ASYMPTOTICS OF THE NUMBER OF DISCS IN APOLLONIAN PACKING

An Apollonian gasket is an elegant packing of tangent circles is constructed by repeatedly inscribing circles into the triangular interstices in configurations of four mutually tangent circles. For a fixed gasket, a natural question arises, how quickly do the circles shrink, or alternatively, how many circles are there with bounded curvatures. An asymptotic result for this number is proposed.

Keywords: Apollonian gasket, packing of circles, Hausdorff dimension.