

Լ.Ն. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Ն.Լ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

**ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՖԵՐՄԱՅԻ
ՄԵԹՈԴԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ
(Կապան)**

Դիտարկված են Ֆերմայի մաթեմատիկական մեթոդի կիրառմամբ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի մի շարք էքստրեմալ խնդիրների լուծման մի քանի օրինակներ: Յուրաքանչյուր մեթոդի կիրառմամբ ֆիզիկայի խնդիրների լուծման արդյունավետությունը և մատչելիությունը ինչպես բուսական, այնպես էլ ավագ դպրոցի դասընթացներում:

Առանցքային բառեր. Ֆերմայի մաթեմատիկական մեթոդ, ֆունկցիայի էքստրեմում, կրիտիկական կետեր:

Ներածություն: Ֆրանսիացի հայտնի մաթեմատիկոս Պիեռ Ֆերմայի կողմից առաջ քաշված մեթոդները և սկզբունքները մեծ հաջողությամբ իրենց կիրառությունն են գտնում ոչ միայն մաթեմատիկայի, այլ նաև ֆիզիկայի մի շարք խնդիրներում և տեսական մեկնաբանություններում:

Աշխատանքի նպատակն է մի շարք խնդիրների օրինակներով ներկայացնել Ֆերմայի մաթեմատիկական մեթոդի մի քանի ուշագրավ կիրառությունները մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի մի շարք էքստրեմալ խնդիրների լուծման դեպքում և դրանով իսկ ցույց տալ այդ մեթոդի կիրառմամբ պայմանավորված նմանատիպ խնդիրների լուծման արդյունավետությունն ու մատչելիությունը:

Մինչ կոնկրետ խնդիրներին անցնելը՝ համառոտ քննարկենք Ֆերմայի թեորեմը ածանցելի ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանի մասին և փորձենք ներկայացնել այդ թեորեմի կապը նույնպես Ֆերմային պատկանող երկրաչափական օպտիկայի հայտնի հիմնարար սկզբունքի հետ:

Ֆերմայի թեորեմը էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի մասին: Դիֆերենցիալ հաշվի այդ կարևոր թեորեմն այնքան պարզ է, որ այն կարելի է ուսումնասիրել «Հանրահաշիվ և տարրական ֆունկցիաներ» առարկայի դպրոցական դասընթացում: Ժամանակակից տերմինաբանությամբ թեորեմը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. եթե x_0 կետի շրջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան ածանցելի է այդ կետում և $x = x_0$ դեպքում ունի էքստրեմում, ապա ֆունկցիայի ածանցյալն այդ կետում՝ $f'(x_0) = 0$:

Փորձենք պարզել, թե ինչ ձևով է Ֆերման ստացել իր թեորեմն ածանցյալի և ինտեգրալ հաշվի «հայտնագործումից» գրեթե կես դար առաջ: Նա ուշադրություն դարձրեց այն բանի վրա, որ էքստրեմումն (լոկալ մինիմումի կամ լոկալ մաքսիմումի) կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում ֆունկցիայի աճը պահպանում է իր նշանը,

անկախ արգումենտի աճի նշանից: Խիստ մինիմումի կետում աճը դրական է, իսկ մաքսիմումի կետում՝ բացասական: Այդ պատճառով էքստրեմումի փնտրման համար Ֆերման ուսումնասիրեց ֆունկցիայի աճի կախումն արգումենտի փոքր աճից [1]:

Յույց տանք, օրինակ, թե ինչպես Ֆերմայի մեթոդով անհրաժեշտ է փնտրել $y = x^2$ պարաբոլի գագաթը, այսինքն՝ $f(x) = x^2$ ֆունկցիայի մինիմումը: Դիտարկենք $f(x)$ ֆունկցիայի աճը կամայական x կետում, արգումենտի փոքր h աճի դեպքում: Կստանանք՝

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2: \quad (1)$$

Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիայի աճը կախված չլինի h -ի նշանից, անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենա $2xh = 0$ հավասարությունը, այսինքն՝ $2x = 0$: Ուրեմն, $x = 0$ և $y = x^2$ պարաբոլի գագաթն ունի $(0,0)$ կոորդինատները: Դիֆերենցիալ հաշվի տեսանկյունից փնտրում ենք այնպիսի x , որը լինի հետևյալը. $f'(x) = 2x = 0$: Ֆերման չէր զբաղվում էքստրեմումի բավարար պայմանների ուսումնասիրությամբ, այնուամենայնիվ, նշենք, որ՝

$$f(0+h) - f(0) = h^2 \geq 0 \quad (2)$$

անհավասարության արդյունքում կարելի է պնդել $x = 0$ կետում ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի գոյությունը:

Դիտարկենք ևս մեկ օրինակ: Դիցուք՝ հետազոտվող ֆունկցիան $g(x) = x(1-x)$ ֆունկցիան է: Ունենք՝

$$g(x+h) - g(x) = x+h - (x+h)^2 - x + x^2 = (1-2x)h - h^2: \quad (3)$$

Ակնհայտ է, որ $g(x)$ ֆունկցիան ամենամեծ արժեքն ունի x կետում, որտեղ $1-2x = 0$, այսինքն՝ $x = 1/2$ դեպքում: Այդ դեպքում ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը՝ $g_{\max} = 1/4$:

Իր հայտնագործությամբ Ֆերման գրեթե չլուծվող խնդիրների մի մեծ դաս տեղափոխեց լրիվ լուծվող խնդիրների շարքը, քանզի պարզվեց, որ ածանցելի ֆունկցիայի էքստրեմումի փնտրման համար ֆունկցիայի որոշման ողջ տիրույթի փոխարեն բավարար է դիտարկել միայն նրա կրիտիկական, այսինքն՝ այն կետերի բազմությունը, որում ֆունկցիայի ածանցյալը հավասարվում է զրոյի:

Կարելի է վստահորեն ենթադրել, որ Էվկլիդեսի «Սկիզբ»-ից Ֆերման գիտեր մաքսիմալ արժեքի փնտրման հայտնի խնդիրը, որն այժմ կարելի էր լուծել իր մեթոդով:

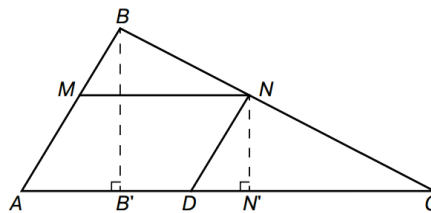
Էվկլիդեսի խնդիրը: Եռանկյանը ներգծած զուգահեռագծերից գտնել այն զուգահեռագիծը, որն ունի ամենամեծ մակերեսը:

Այս խնդիրն ինքը՝ Էվկլիդեսը լուծեց և հաստատեց, որ փնտրվող զուգահեռագիծն այն է, որի հիմքը երկու անգամ փոքր է տրված եռանկյան հիմքից: Ներկայումս երկրաչափության այս խնդիրը հանգեցվում է ֆունկցիայի էքստրեմումի փնտրման ոչ բարդ խնդրին: Դիցուք՝ ABC եռանկյանը ներգծված է $AMND$ զուգահեռագիծը (նկ. 1): Ենթադրենք՝ $AD = x \cdot AC$, $0 \leq x \leq 1$: ABC և DNC եռանկյունների նմանությանից հետևում է, որ $NN' = (1-x) \cdot BB'$: Դրա հետևանքով զուգահեռագծի մակերեսը՝

$$S = AC \cdot BB' \cdot x(1-x) = 2S_1 x(1-x), \quad (4)$$

որտեղ S_1 -ը եռանկյան մակերեսն է: Ինչպես ցույց տրվեց վերևում, $g(x) = x(1-x)$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում, երբ $x = 1/2$: Այսպիսով, $S = S_1/2$, երբ $x = 1/2$, այսինքն՝ երբ $AD = DC$:

Ֆերմայի խնդիրը: AB հատվածը բաժանել AC և CB հատվածների այնպես, որ AC և CB կողմերով ուղղանկյունն ունենա ամենամեծ մակերեսը:



Նկ. 1

Ենթադրենք՝ $AC = x \cdot AB$, $0 \leq x \leq 1$: Այդ դեպքում $CB = (1-x)AB$ և ուղղանկյան մակերեսը՝ $S = AB^2 x(1-x)$: Այսպիսով, AC

և CB կողմերով ուղղանկյան մակերեսն ունի $S_{\max} = AB^2/4$ առավելագույն արժեքը, երբ $x = 1/2$, այսինքն՝ AB հատվածը պետք է կիսել երկու հավասար մասերի:

Այժմ անցնենք ֆիզիկայի էքստրեմալ խնդիրներում Ֆերմայի մեթոդի մի քանի կիրառությունների քննարկմանը:

Երբեմն ուսանողների հետ, իսկ դպրոցում նաև ավագ դասարանների սովորողների հետ հարկ է լինում դիտարկել ֆիզիկայի դասընթացի ոչ բարդ խնդիրներ՝ մինչ մաթեմատիկայի (մաթանալիզի) դասընթացի յուրացումը: Նման իրավիճակներում խիստ օգտակար են ֆիզիկային նվիրված գիտամեթոդական գրականության մեջ երբեմն ի հայտ եկող այնպիսի հրապարակումները, որոնք վերաբերում են տարրական մաթեմատիկայի մեթոդների կիրառմամբ ֆիզիկայի էքստրեմալ խնդիրների լուծմանը (օրինակ՝ [6] աշխատանքը): Նմանատիպ խնդիրների լուծման դեպքում հեղինակները սովորաբար գտնում են լուծման ինքնատիպ մեթոդներ: Այդպիսի լուծման մի օրինակ է ֆիզիկայի դասընթացից հայտնի հետևյալ խնդրի լուծումը:

Խնդիր 1: Էլեկտրական շղթան բաղկացած է հոսանքի աղբյուրից և ռեոստատից: Աղբյուրի էլշուն՝ $\varepsilon = 6$ Վ, իսկ ներքին դիմադրությունը՝ $r = 2$ Օմ: Ռեոստատի

դիմադրությունը կարելի փոփոխել 1 Օմ -ից մինչև 5 Օմ սահմաններում: Ինչի՞ է հավասար ռեոստատի վրա անջատվող հոսանքի առավելագույն հզորությունը:

Լուծում: Այս խնդիրը կարելի է լուծել ինչպես մաթեմատիկական մեթոդներով, այնպես էլ ածանցյալի կիրառմամբ: Սակայն այս դեպքում մեր նպատակն է ներկայացնել լուծում, երբ օգտագործվում է Ֆերմայի համընդհանուր մեթոդը:

Մինչ նշված մեթոդով խնդրի անմիջական լուծմանն անցնելը, նախ և առաջ նշենք, որ Ֆերմայի համընդհանուր մեթոդը երբեմն օգտագործվում է նաև ժամանակակից հեղինակների կողմից: Օրինակ, Վ.Ի.Սամոյլի [3] հոդվածում հետազոտված են երկու պարզագույն բազմանդամների էքստրեմումները, իսկ [2] գիտական զեկուցումից երևում է, որ Ֆերմայի մեթոդը կարելի է օտագործել ոչ միայն բազմանդամների, այլ նաև ավելի բարդ ֆունկցիաների հետազոտման դեպքում: Որպես օրինակ, փորձենք Ֆերմայի մեթոդը կիրառել հետևյալ ռացիոնալ կոտորակային ֆունկցիայի նկատմամբ.

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} : \quad (5)$$

Դիցուք՝ x_0 -ն այն կետի կոորդինատն է, որում f ֆունկցիան ունի էքստրեմում, իսկ x -ը էքստրեմումին մոտիկ կետերի կոորդինատներն են:

Դիտարկվող ֆունկցիայի համար որոշենք հետևյալ տարբերությունը.

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x_0}{1+x_0^2} = (x-x_0) \frac{2(1-x_0x)}{(1+x^2)(1+x_0^2)} : \quad (6)$$

Եթե x_0 -ն այն կետն է, որտեղ f ֆունկցիան ունի էքստրեմում, ապա Δf տարբերությունը $x > x_0$ դեպքում ունի այն նույն նշանը, ինչ $x < x_0$ դեպքում: Քանի որ (6) արտահայտության մեջ Δf -ը երկու բազմապատկիչների արտադրյալ է, իսկ առաջին արտադրիչը փոխում է իր նշանը x արգումենտի՝ էքստրեմումի x_0 կետով անցնելիս, ապա իր նշանը պետք է փոխի նաև (6) արտահայտության աջ մասի երկրորդ՝ կոտորակային արտադրիչը: Դրա հետևանքով երկրորդ արտադրիչը, ինչպես և առաջինը, $x = x_0$ դեպքում պետք է հավասար լինի զրոյի.

$$\frac{2(1-x_0x)}{(1+x^2)(1+x_0^2)} = 0, \text{ երբ } x = x_0 : \quad (7)$$

Այսպիսով, համաձայն (6)-ի և (7)-ի կունենանք՝

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0, \text{ երբ } x = x_0 : \quad (8)$$

Հասկանալի է, որ (8) արտահայտությունը հենց Ֆերմայի թեորեմն է, որը գրված է առանց ածանցյալի հասկացության օգտագործման, սակայն Ֆերմայի ավգորիթմի կիրառման արդյունքում: Եվ, վերջապես, (7)-ից ստանում ենք՝ $x_0^2 - 1 = 0$, որտեղից հետևում է, որ (5) ֆունկցիան ունի երկու էքստրեմալ կետեր. $x_{01} = -1$, $x_{02} = +1$: Ընդ որում՝ $f(x_{01}) = -1$, իսկ $f(x_{02}) = +1$:

Այժմ վերադառնանք վերևում առաջարկված խնդրի լուծմանը: Օհմի օրենքի համաձայն՝ փակ շղթայում հոսանքի ուժի համար կունենանք՝ $I = \varepsilon / (r + R)$: Հետևաբար՝ ռեոստատի վրա անջատվող հզորության համար կարող ենք գրել՝ $P = \varepsilon^2 R / (r + R)^2$: Այսինքն՝ խնդիրը հանգեցվում է

$$P(R) = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2} \quad (9)$$

ֆունկցիայի առավելագույն արժեքի որոշմանը: Ակնհայտ է, որ (9)-ի առավելագույն արժեքի որոշումը հանգեցվում է

$$G(R) = \frac{R}{(r + R)^2} \quad (10)$$

ֆունկցիայի առավելագույն արժեքի որոշմանը: Փորձենք Ֆերմայի մեթոդով ներկայացնել (5) ֆունկցիայից ε^2 հաստատուն արտադրիչով տարբերվող (10) ֆունկցիայի առավելագույն արժեքի որոշման էքստրեմալ խնդրի լուծումը:

Դիցուք՝ R_0 -ն $G(R)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետն է: Մաթեմատիկական ոչ բարդ ձևափոխություններով կարելի է համոզվել, որ R կետում և R_0 կետում ֆունկցիայի արժեքների ΔG տարբերությունը որոշվում է հետևյալ արտահայտությամբ.

$$\Delta G = G(R) - G(R_0) = (R - R_0) \frac{(r^2 - R_0 R)}{(r + R)^2 (r + R_0)^2} : \quad (11)$$

Վերևում դիտարկված $f(x)$ ֆունկցիայի, ինչպես նաև (7) և (8) արտահայտությունների համանմանությամբ կարող ենք գրել, որ (11)-ի ինչպես առաջին, այնպես էլ երկրորդ արտադրիչը $R = R_0$ դեպքում պետք է հավասար լինի զրոյի.

$$\frac{(r^2 - R_0 R)}{(r + R)^2 (r + R_0)^2} = 0, \text{ երբ } R = R_0 : \quad (12)$$

$$\frac{G(R) - G(R_0)}{R - R_0} = 0, \text{ երբ } R = R_0 : \quad (13)$$

(9) արտահայտությամբ որոշվող հզորության առավելագույն արժեքի համար ստանում ենք՝

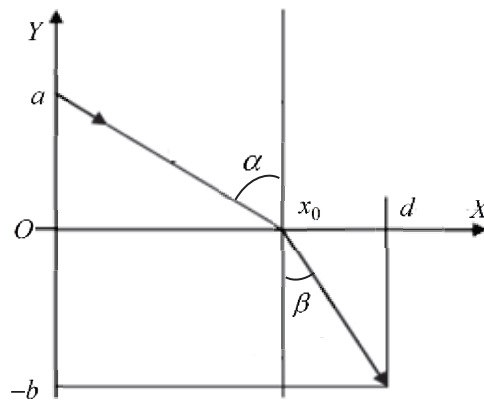
$$P_{\max}(r) = \frac{\varepsilon^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r}; \quad (14)$$

Այս արտահայտության մեջ թվային արժեքները տեղադրելով ռեոստատի վրա՝ անցատվող առավելագույն հզորության համար ստանում ենք 4,5 Վտ:

Ֆիզիկայի դասընթացում երբեմն հարկ է լինում գործ ունենալ այնպիսի էքստրեմալ խնդիրների հետ, որտեղ ֆունկցիան պարունակում է արմատներ: Օրնակ, այդ խնդիրն առաջանում է Ֆերմայի վարիացիոն սկզբունքից լույսի անդրադարձման և բեկման օրենքները դուրս բերելիս: Իսկ վարիացիոն սկզբունքն ունի հետևյալ պարզեցված ձևակերպումը. *Տարածության երկու կետերի միջև լույսը տարածվում է այն ճանապարհով, որի երկայնքով նրա տարածման ժամանակամիջոցը նվազագույնն է:* Լույսի բեկման դեպքում նվազագույն արժեք պետք է ունենա

$$f(x) = \frac{1}{v_1} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \quad (15)$$

Ֆունկցիան, որտեղ v_1 -ը լույսի արագությունն է առաջին միջավայրում, v_2 -ը՝ լույսի արագությունը երկրորդ միջավայրում (նկ. 2):

 $\mathcal{U}_4. 2$

Ինչպես և նախորդ երկու դեպքերում, գրենք $f(x)$ ֆունկցիայի $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ տարբերությունը x և x_0 կետերում.

$$\Delta f = \frac{1}{v_1} \left[\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + x_0^2} \right] + \frac{1}{v_2} \left[\sqrt{b^2 + (d-x)^2} - \sqrt{b^2 + (d-x_0)^2} \right]: \quad (16)$$

Պարզ հանրահաշվական ձևափոխություններից հետո, որը ներառում է նաև քառակուսային փակագծերի մեջ գտնվող տարբերությունների բազմապատկումն ու բաժանումը նույն արմատների գումարով, ստանում ենք՝

$$\frac{\Delta f}{x - x_0} = \frac{x + x_0}{v_1 \left[\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + x_0^2} \right]} + \frac{x + x_0 - 2d}{v_2 \left[\sqrt{b^2 + (d-x)^2} + \sqrt{b^2 + (d-x_0)^2} \right]}: \quad (17)$$

Ստացված արդյունքի նկատմամբ կիրառենք Ֆերմայի ալգորիթմը, այն է՝

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0, \text{ երբ } x = x_0,$$

որից հետո կստանանք.

$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{d - x_0}{v_2 \sqrt{b^2 + (d - x_0)^2}}, \quad (18)$$

կամ, ինչպես հետևում է նկ. 2-ից, կարող ենք գրել՝

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}: \quad (19)$$

Սա հենց լույսի բեկման օրենքն է:

Ֆերմայի մեթոդից օգտվելով, ավելի հեշտ, քան լույսի բեկման օրենքը, կարելի է ստանալ լույսի անդրադարձման օրենքը:

Շատ դեպքերում, այլ էքստրեմալ խնդիրների ուսումնասիրման համար, այստեղ ներկայացված Ֆերմայի ալգորիթմը անհարաժեշտ է լինում ենթարկել որոշակի մոդիֆիկացիայի: Այդպիսի օրինակներում քիչ թիվ չեն կազմում այն խնդիրները, որտեղ օգտագործվում են եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:

Անդրադառնանք [4] աշխատանքում մեր կողմից դիտարկված <<Խնդիր 5>>-ին, որը կձևակերպենք հետևյալ կերպ.

Խնդիր 2: Հորիզոնի նկատմամբ ինչպիսի՞ α անկյան տակ չորսուի վրա պետք է կիրառել F ուժը, որպեսզի նվազագույն ճիգ գործադրելով այն հավասարաչափ տեղափոխվի μ շփման գործակցով հորիզոնական մակերևույթով

Լուծում: Ինչպես ցույց է տրվել [4] աշխատանքում, խնդիրն այս դեպքում հանգեցվում է

$$F(\alpha) = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \quad (20)$$

ֆունկցիայի նվազագույն արժեքի որոշմանը: Ինչպես և նախորդ խնդիրների լուծման ժամանակ, ներկայացնենք $F(\alpha) - F(\alpha_0)$ տարբերությունը, որտեղ α_0 -ն α անկյան այն ենթադրյալ արժեքն է, որի դեպքում F ուժն ունի նվազագույն արժեք:

$$F(\alpha) - F(\alpha_0) = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} - \frac{\mu mg}{\cos \alpha_0 + \mu \sin \alpha_0} : \quad (21)$$

Որոշ եռանկյունաչափական ձևափոխություններից հետո ստանում ենք՝

$$F(\alpha) - F(\alpha_0) = \sin\left(\frac{\alpha_0 - \alpha}{2}\right) \cdot \left[\frac{2\mu mg \left(\mu \cos\left(\frac{\alpha_0 + \alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_0 + \alpha}{2}\right) \right)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)(\cos \alpha_0 + \mu \sin \alpha_0)} \right] : \quad (22)$$

Ինչպես և նախորդ դեպքերում, տարբերությունը ներկայացնում է երկու արտադրիչների արտադրյալ: Ընդ որում, ինչպես և նախորդ դեպքերում, առաջին արտադրիչը փոխում է իր նշանը α արգումենտի արժեքի՝ α_0 -ի հավասար արժեքով անցնելիս: Էքստրեմումի կետով անցնելիս իր նշանը պետք է փոխի նաև ուղիղ փակագծի ներսում գտնվող երկրորդ արտադրիչը: Հետևաբար, այդ արտադրիչը $\alpha = \alpha_0$ դեպքում պետք է հավասար լինի զրոյի: Այստեղից ստանում ենք.

$$\mu \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \mu, \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg} \mu : \quad (23)$$

(23)-ից ստացվող արժեքները $F(\alpha)$ -ի (20)-ով որոշվող արտահայտության մեջ տեղադրելով, ($\alpha = \alpha_0$ դեպքում) ստանում ենք՝

$$F(\alpha_0) = \mu mg \cos \alpha_0 : \quad (24)$$

Նշենք, որ դիտարկված խնդրի լուծումը կարելի է, գուցե և ավելի պարզ, ներկայացնել՝ հետազոտելով ոչ թե ֆունկցիան, այլ միայն $F(\alpha)$ ուժի, այսինքն՝ (20)-ի հայտարարի արտահայտությունը:

Այսպիսով, կարելի է փաստել, որ Ֆերմայի մեթոդի կիրառումը հնարավորություն է տալիս ավելի պարզ ներկայացնել որոշ տեսական մեկնաբանություններ, ինչպես նաև համեմատաբար մատչելի եղանակներով լուծել բուիի ու ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դասընթացներում դիտարկվող մի շարք էքստրեմալ խնդիրներ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Белл Э.Т.** Творцы математики: Предшественники современной математики: Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 1979.- 256 с.
2. **Лузин А.Н.** О решении экстремальных задач методами элементарной математики. Методические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения физике // Тез. Докл. 2-й Всесоюзной научно-методической конференции.- Донецк. Дон. ГУ, 1991.- С. 126 – 128.
3. **Самохин В.Н.** Необходимое условие экстремума и вариационный принцип Ферма // Соросовский образовательный журнал.- 1999.- N 6.- С. 123 – 126.
4. **Պետրոսյան Լ.Ն., Պետրոսյան Ն.Լ.** Էքստրեմումի որոշմամբ ֆիզիկայի խնդիրների լուծման մեթոդների և դրանց կիրառման մի քանի օրինակների մասին // ԲՆԱԳԵՏ, 2015.- N 3. - էջ 10 – 19:

Н.Л. ПЕТРОСЯН, Л.Н. ПЕТРОСЯН

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФЕРМА В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Рассматриваются несколько интересных случаев применения математического метода Ферма при решении задач по математике и физике. Показаны эффективность и доступность решения задач с применением этого метода как в вузовском курсе физики, так и в курсе физики в старшей школе.

Ключевые слова: математический метод Ферма, экстремум функции, критические точки.

N.L. PETROSYAN, L.N. PETROSYAN

SOME APPLICATIONS OF THE FERMA METHOD IN A NUMBER OF EXTREMAL TASKS ON MATHEMATICS AND PHYSICS

Some interesting applications of the mathematical method of Ferma are observed at solving some extremal tasks on mathematics and physics. The effectiveness and availability of solving tasks by this method is shown both in the course of Physics in Higher Educational Establishment and in the course of Physics in High School.

Keywords: mathematical method of Ferma, extremum of function, critical points