ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՀՏԴ 517.948

Ս.Ա. ԵՊԻՍԿՈՊՈՍՅԱՆ, Ս.Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՈՒՈԼՇԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼԵԲԵԳԻ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱԺՈՐԱՆՏՆԵՐ

Ուսումնասիրվել են Ուոլշի դասական և ընդհանրացված համակարգերի Լեբեգի ֆունկցիաների մաժորանտների գոյության հարցերը:

Առանցքային բառեր. Ուոլշի համակարգ, մաժորանտ, Լեբեգի հաստատուններ, Դիրիխլեի կորիզ:

Դիցուք $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ համակարգը օրթոնորմալ համակարգ է [1]:

Սահմանում 1: $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ համակարգի Դիրիխլեի կորիզ կոչվում է $D_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x)\varphi_t(x)$, իսկ $L^1[a,b]$-ի նորմ կոչվում են Լեբեգի ֆունկցիաները.

$$L_n(x)=\|D_n\|_{L^1[a,b]}=\int_a^b[D_n(x,t)]dt:$$

Ուոլշի ֆունկցիան սահմանելու համար նախ անհրաժեշտ է սահմանել Ռադեմահերի ֆունկցիան:

Սահմանում 2: Ռադեմահերի համակարգը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$r_0(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\\ -1, x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right),\end{cases}\quad r_0(x+1)=r_0(x), r_k(x)=r_0(2^k x), k=1,2,\ldots,$$

այսինքն Ռադեմահերի հաջորդ r_k ֆունկցիան գտնելու համար [0;1) միջակայքը տրոհվում է 2^{k+1} հավասար միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա $r_k(x)$ ֆունկցիան հաջորդաբար ընդունում է +1 և -1 արժեքներ:

Ուոլշի համակարգը սահմանվում է որպես Ռադեմահերի ֆունկցիաների բոլոր հնարավոր վերջավոր արտադրյալներ: Ուոլշի համակարգն ավելի ճշգրիտ սահմանենք հետևյալ կերպ.

Սահմանում 3: $W_0(x)=1$: Ցանկացած n բնական թիվ ներկայացնենք $n=\sum_{s=1}^{k}2^{m_s}, m_1>m_2>\cdots>m_k\geq 0$ տեսքով: Ուոլշի n-րդ ֆունկցիան կսահմանենք հետևյալ կերպ՝ $W_n(x)=\prod_{s=1}^{n}r_{m_s}(x)$:

Ուոլշի համակարգի Դիրիխլեի կորիզը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(t):$$

Համապատասխանաբար Լեբեգի ֆունկցիաները՝ $L_n(x) = \int_0^1 |D_n(t)| dt$:

Պնդում 1: Տեղի ունեն Ֆայնի ռեկուրենտ բանաձևերը [2]՝

$$\begin{cases} L_{2n} = L_n, \\ L_{2n+1} = \frac{1}{2}(L_n + L_{n+1} + 1): \end{cases}$$

1949թ. Ն.Ջ. Ֆայնը ներմուծել է հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f(n) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\log_2 3n,$$

որն անվանում են Ուոլշի համակարգի Լեբեգի հաստատունի մաժորանտ [3]:

Թեորեմ 1. Տեղի ունի հետևյալ պնդումը՝

1. $L_n < f(n)$, երբ $n \neq t_{2m}$,
2. $f(n) < L_n < f(n) + \frac{1}{n}$, երբ $n = t_{2m}$, որտեղ $t_{2m} = \sum_{s=0}^{m} 2^{2s}$:

Հարց է առաջանում. ճի՞շտ է արդյոք թեորեմը ընդհանրացված Ուոլշի համակարգի դեպքում: Սահմանենք ընդհանրացված Ուոլշի համակարգը: Նախ՝ սահմանենք ընդհանրացված Ռադեմահերի $\Phi_a = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ համակարգը $[0,1)$ ինտերվալում:

Դիցուք $a \geq 2$ ֆիքսված բնական թիվ է, և $\omega_a = e^{2\pi i/a}$.

$$\varphi_0(x) = \omega_a^k, x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right), k = 0,1,\dots,a-1, \text{և } n \geq 0 - \text{ի համար}`$$

$$\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) = \varphi_0(a^n x):$$

Ընդհանրացված Ուոլշի համակարգը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $\psi_0(x) = 1, \psi_n(x) = \varphi_{n_1}^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_s}^{\alpha_s}(x)$, որտեղ $n = \alpha_1 a^{n_1} + \cdots + \alpha_s a^{n_s}, n_1 > n_2 > \cdots > n_s, s = 1,2,\dots$, որտեղ $0 \leq \alpha_j < a, j = 1,2,\dots s$:

Ակնհայտ է, որ ψ_2-ը դասական Ուոլշի համակարգն է:

Ներմուծենք հետևյալ ֆունկցիան՝ $F(t) = \log_a t$:

Թեորեմ 2. Գոյություն ունի $t_k, t_{2s} = \sum_{i=0}^{s} a^{2i}, t_{2s+1} = \sum_{i=0}^{s} a^{2i+1}, s = 0,1,2,\dots$ այնպես, որ $L_n < F(n)$, եթե $n \neq t_k$ և $L_n > \frac{1}{2a} \cdot F(n)$, եթե $n = t_k$ [4]:

Այժմ ներկայացնենք Python ծրագրավորման լեզվով գրված ծրագիրը, որը հաշվում է Լեբեգի հաստատունների շեղումը նրանց մաժորանտներից:

```
import numpy as np
from scipy.linalg import hadamard
from scipy.integrate import quad

n = int(input("Enter a number: "))

# Calculate N and binary_length
N = 1
binary_length = 0
while N < n:
  N = N * 2
  binary_length += 1

# Calculate the step size
step_size = 1 / N # Calcuate the step size
step_sizes = [i * step_size for i in range(N + 1)]

# Generate a Hadamard matrix of order N
hadamard_matrix=[]
for i, hm in enumerate(hadamard(N)):
  hadamard_matrix.append(hm)

#convert the indexes of hadamard to walsh using Gray code
def index_convert(N, l):
  decimal_number = 0
  walsh_index=[]
  for i in range(N):
  decimal_number=i
  desired_length = l # binary length
  binary_number = format(decimal_number, f"0{desired_length}b")

  # Step 2: Apply Gray code
  gray_code_number = binary_number[0] + ''.join([str(int(binary_number[i]) ^
int(binary_number[i-1])) for i in range(1, len(binary_number))])

  # Step 3: Reverse the Gray code
```

```
    reversed_gray_code = gray_code_number[::-1]

    # Step 4: Convert the reversed Gray code to decimal
    walsh_index.append(int(reversed_gray_code, 2))

    # print(f"correct_index={correct_index}")
    return walsh_index
  walsh_index=index_convert(N, binary_length)

  # Calculate the Walsh function based on the Walsh index
  walsh_function=[]
  for i in range(len(walsh_index)):
    walsh_function.append(hadamard_matrix[walsh_index[i]])

  #Calculate the Dirichlet kernel
  t = 1
  D_n = [sum(walsh_function[k][t] for k in range(n)) for t in
range(len(walsh_function[0]))]

  # Calculate the Lebesgue constant L_n using numerical integration
  integrand=np.abs(D_n)
  integral_results=[]
  for i in range(N):
    lower_limit = step_sizes[i]
    upper_limit = step_sizes[i + 1]

    # Integrate the absolute value of D_n over the interval
    result, _ = quad(lambda x: integrand[i], lower_limit, upper_limit)
    integral_results.append(result)

  # Lebesgue constant (Sum of the integral results)
  L_n = sum(integral_results)

  # Calculate the Lebesgue majorant
  def f(n):
    f_n=4/9+(np.log2(3*n))/3
```

```
  return f_n

# Check if n belongs to t_m series
def is_in_tm(n):
  m = 0
  tm = 0
  while True:
  term = 4 ** m
  tm += term
  if tm == n:
  return True, tm
  if tm> n:
  return False, tm
  m += 1

found, tm = is_in_tm(n)

# Output the results
if found:
  print(f"{n} is in the t_m series.")
  print(f"f({n}): {f(n)}")
  print(f"L_{n}: {L_n}")
  print(f"f({n})+1/{n}: {f(n)+1/n}")
  print(f"e_{n}={error}")
else:
  print(f"{n} is not in the t_m series.")
  print(f"L_{n}: {L_n}")
  print(f"f({n}): {f(n)}")
  print(f"e_{n}={error}")
```

Ծրագրի արդյունքը n=24 դեպքում ՝ e_24=-1.0010861115918814, իսկ n=85 դեպքում՝ e_85=0.0001460766026033511:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Եպիսկոպոսյան Ս.Ա.** Դասական օրթոգոնալ համակարգեր և բազմանդամներ. Ուսումնական ձեռնարկ. -Երևան: Ճարտարագետ, 2015:
2. **Беспалов М.С.**, **Скляренко В.А.** Функции Уолша и их приложения: Учебное пособие.-Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012.- 35с.
3. **Fine N.J.** On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc.- 1949.- V. 65, No 3.-P. 372–414.
4. **Episkoposian S.A.** On divergence of Greedy algorithm by generalized Walsh systems// Izvestiya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii/ English trans // Journal of Contemporary Mathematical Analysis.-2006.- Vol.41, n.2.- P. 14 – 24.

С.А. ЕПИСКОПОСЯН, С.А. ГРИГОРЯН

МАЖОРАНТЫ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УОЛША

Изучены классические и обобщенные системы Уолша и их мажоранты, введенные Н. Файном. Программа, написанная на языке программирования Python, вычисляет отклонение констант Лебега от их мажорант.

Ключевые слова: система Уолша, мажорант, константы Лебега, ядро Дирихле.

S.A. EPISKOPOSYAN, S.A. GRIGORYAN

MAJORANTS OF THE LEBESGUE CONSTANTS OF THE GENERALIZED WALSH SYSTEM

Walsh's classical and generalized systems and their majorants introduced by Fine, N. J. are studied. The program written with the Python programming language calculates the deviation of Lebesgue's constants from their majorants.

Keywords: Walsh system, majorant, Lebesgue constants, Dirichlet kernel.