УДК 517.946

А.О. БАБАЯН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ТРЕХКРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Получена формула для определения дефектных чисел задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения шестого порядка. Предполагается, что соответствующее характеристическое уравнение имеет два различных корня одинаковой кратности три.

Ключевые слова: задача Дирихле, дефектные числа, полиномиальное решение, правильно эллиптическое уравнение.

Пусть D - единичный круг комплексной плоскости с границей Γ. В работе в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 u=0, \tag{1}$$

где $\lambda_j \neq i$ $(j=0,1)$ - такие комплексные числа, что $\Im\lambda_1>0>\Im\lambda_2$ (правильно эллиптическое уравнение). Следует определить решение $u\in C^6\left(D\right)\bigcap C^{(2,\alpha)}\left(D\bigcup\Gamma\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее на Γ условиям Дирихле

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\right|_{\Gamma}=f_k\left(x,y\right),\quad k=0,1,2;\ \left(x,y\right)\in\Gamma. \tag{2}$$

Здесь f_k $\left(k=0,\ldots,n-1\right)$ - заданные на Γ функции такие, что $f_k\in C^{(2-k,\alpha)}\left(\Gamma\right)$; $\frac{\partial}{\partial r}$ - производная по направлению радиуса-вектора комплексного числа $\left(z=re^{i\phi}\right)$.

Задача (1), (2) фредгольмова ([1,2]), и в работе [3] получены формулы для определения дефектных чисел этой задачи (т.е. количество линейно независимых решений однородной задачи (1), (2) при $f\equiv 0$ и число линейно независимых условий разрешимости неоднородной задачи). Затем в [4] было показано, что для уравнения четвертого порядка эти формулы можно уточнить. В настоящей работе получены формулы для дефектных чисел для уравнения шестого порядка, когда характеристическое уравнение имеет трехкратные корни. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

$$\mu = \frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1},\ \nu = \frac{i+\lambda_2}{i-\lambda_2},\ z = \mu\nu. \tag{3}$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\det \Omega_j(z) \neq 0,\ \ j = 4,5,\ldots, \tag{4}$$

где матрица третьего порядка $\Omega_j(z)$ определяется по формуле

$$\Omega_j(z) = \begin{pmatrix} g''_{2j}(z) & jg'_{2j}(z) & \dfrac{j(j+1)}{2} g_{2j}(z) \\ g''_{1j}(z) & (j-1)g'_{1j}(z) & \dfrac{(j-1)j}{2} g_{1j}(z) \\ g''_{0j}(z) & (j-2)g'_{0j}(z) & \dfrac{(j-2)(j-1)}{2} g_{0j}(z) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $g_{lj}(z) = \sum\limits_{k=0}^{j+l-1} z^k$ при $l = 0,1,2$. Если условие (4) нарушается при некотором k, то соответствующая однородная задача имеет ненулевое решение, которое является многочленом порядка $k+2$, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие. Таким образом, дефектные числа задачи равны количеству номеров, при которых нарушается условие (4).

Доказательство. Определим числа μ и ν по формулам (3). Тогда, используя операторы комплексного дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

уравнение (1) представим в комплексной форме:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^3 u = 0\,. \tag{6}$$

Далее, используя формулы, доказанные в [3], получим, что задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\Delta_l = det\Theta_l = \det\begin{pmatrix} A & BH^l \\ AM^l & B \end{pmatrix} \neq 0, \quad l = 4, 5, \ldots, \tag{7}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ \mu^2 & 2\mu & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2\nu & \nu^2 \\ 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \nu & 1 & 0 \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Вынесем в детерминанте Δ_l из последних трех столбцов ν^l, ν^{l+1}, ν^{l+2} соответственно, а затем умножим вторую, третью, четвертую, пятую и шестую строки на ν, ν^2, ν^l, ν^{l+1} и ν^{l+2}. Получаем условие однозначной разрешимости, эквивалентное (7):

$$\Lambda_l = det\Theta_l = \det\begin{pmatrix} P & QV^l \\ PW^l & Q \end{pmatrix} \neq 0, \quad l = 4,5,\ldots, \tag{8}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ z^2 & 2z & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ W = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя матричное тождество

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -W^l P^{-1} & P^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & QV^l \\ PW^l & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & QV^l \\ 0 & P^{-1}Q - W^l P^{-1} Q V^l \end{pmatrix},$$

сводим условие (8) к эквивалентной форме:

$$X_k = \det\left(P^{-1}Q - W^k P^{-1} Q V^k\right) \neq 0, \ k = 4,5,\ldots$$

или

$$Y_k = \det\left(\left(QV^{-1}Q^{-1}\right)^k - \left(PWP^{-1}\right)^k\right) \neq 0, \ k = 4,5,\ldots. \tag{9}$$

Отделяя множители $(1-z)^6 z^3$, не влияющие на условия разрешимости (так как $0 < |z| < 1$), получаем условие (4), что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что формулу (4) можно преобразовать. Отделяя множитель $(1-z)^2$, получим, что формула (4) эквивалентна следующей формуле:

$$\det \Phi_j(z) \neq 0, \quad j = 4,5,\ldots, \tag{10}$$

где

$$\Phi_j(z) = \begin{pmatrix} (j+1)jz^{j-1} - (j-1)jz^{j-2} & (j-1)jz^{j-2} & -\mathrm{T} \\ (j-1)jz^{j-2} & \mathrm{T} & \Lambda \\ -\mathrm{T} & \Lambda & \Theta \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\mathrm{T} = -\sum_{k=0}^{j-3}(k+1)(k+2)z^k,$$

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{j-3}(k+2)(k+1)(k+3-j)z^k,$$

$$\Theta = \sum_{k=0}^{j-3}\frac{(k+1)(k+2)(k+3-j)(k+4-j)}{2}z^k.$$

В частности, если $j=4$, имеем

$$\det \Phi_4(z) = 8\left(1+9z+9z^2+z^3\right).$$

При $z_0 = \sqrt{15}-4$ имеем $\Phi_4(z_0)=0$ (отметим, что z_0 - это единственное значение z, удовлетворяющее условию $|z|<1$ и являющееся корнем уравнения $\Phi_4(z)=0$). Вспоминая, что $z=\mu\nu$, можем взять, например, $\mu=0.5$ и $\nu = 2\left(\sqrt{15}-4\right)$ (при этом $|\mu|<1$, $|\nu|<1$). Тогда непосредственной проверкой можем убедиться, что ненулевая функция $u=\left(1-z\overline{z}\right)^3$ удовлетворяет уравнению (6) и однородным граничным условиям (2), то есть является нетривиальным решением однородной задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tovmasyan N.E.** Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields.- World Scientific Publishing Co. Ltd. Singapore, N.-J., London, Hong-Kong, 1998.-236p.
2. **Lions J.-L., Magenes E.** Probl `e mes aux limites non homo `e nes et applications. Vol. I, Dunod. – Paris, 1968.-372p.
3. **Бабаян А.О**. О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге // Известия НАН Армении. Математика.-2003.- Том 38(6). - С.39-48.
4. **Бабаян А.О**. Задача Дирихле для уравнения в частных производных четвертого порядка в случае двукратных корней характеристического уравнения // Mathematica Montisnigri. -2015.- Vol. 32.-P.66-80.

Ա.Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ

ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԵՌԱՊԱՏԻԿ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՃՇԳՐԻՏ ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ՝ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ստացվել է վեցերորդ կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար Դիռիխլեի խնդրի դեֆեկտային թվերը որոշելու բանաձևը: Ենթադրվում է, որ համապատասխան բնութագրիչ հավասարումն ունի նույն եռապատիկության երկու տարբեր արմատ:

Առանցքային բառեր. Դիրիխլեի խնդիր, դեֆեկտային թվեր, բազմանդամային լուծում, ճշգրիտ էլիպսական հավասարում:

A.H. BABAYAN

A DIRICHLET PROBLEM FOR SIXTH ORDER PROPERLY ELLIPTIC EQUATION IN THE CASE OF THREE-MULTIPLE ROOTS OF CHARACTERISTIC EQUATION

The formula for determination of defect numbers of the Dirichet problem for the sixth order properly elliptic equation is obtained. It is supposed that the corresponding characteristic equation has two different roots of the same multiplicity three.

Keywords: Dirichlet problem, defect numbers, polynomial solution, properly elliptic equation.