

**В.Г. МАНУКЯН**

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ АНТИЦИРКУЛЯНТНЫХ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ  
КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ**

Предлагается подход для выбора регуляторов антициркулянтных многомерных систем автоматического регулирования, который позволяет проектировать подобные системы с помощью классических методов теории систем автоматического регулирования. Выведены аналитические формулы для вычисления передаточных функций эквивалентных одномерных систем. Проведен анализ устойчивости конкретной двумерной системы.

**Ключевые слова:** многомерная система автоматического регулирования, антициркулянтный регулятор, характеристическая передаточная функция.

**V.H. MANUKYAN**

**DESIGNING ANTICIRCULANT AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS BY  
CLASSICAL METHODS**

An approach to choosing matrix regulators for anticirculant automatic control systems is proposed, allowing to design such systems by the classical methods of the automatic control system theory. An analytical formulae for calculating the transfer functions of the equivalent one-dimensional systems are derived. The stability analysis of a two-dimensional anticirculant system is performed.

**Keywords:** multivariable feedback control system, anticirculant regulator, characteristic transfer function.

УДК 004.4:519.856:623.5

**Г.Г. ХАЧАТРЯН, Р.С. ГАСПАРЯН**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ ЗАДАЧИ 2А**

Рассматриваются вероятностные процессы стрельбы по двум целям из противотанковых систем (ПТС). Дается определение простейшего потока событий касательно стрельбы по целям. Предлагается математическая модель вероятностных процессов стрельбы, построенная на основе марковских цепей. Приведено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** артиллерия, стрельба, теория вероятностей, теория массового обслуживания, марковские цепи, математическое моделирование.

**Постановка задачи.** Целью работы является математическое моделирование вероятностных процессов задачи 2а (стрельба прямой наводкой по движущимся целям) курса подготовки артиллерии КПА-2012 [1], оценка вероятности уничтожения целей и определение предельных стационарных режимов на основе математического моделирования.

**Введение.** Произведем анализ системы, характеризующей динамику потока событий по уничтожению двух целей построением математической модели марковских процессов, живучесть которых и поток атак на них (из ПТС) можно моделировать при помощи марковских цепей. Приведем основные положения системы, а также проанализируем полученные результаты.

Поскольку процесс перехода цели из одного состояния  $S_i$  (цель невредима) в другое  $S_j$  (цель уничтожена) является случайным с дискретным состоянием и непрерывным временем, то он является *непрерывной цепью Маркова*. Такая цепь характеризуется вероятностью перехода  $P_{ij}$  и плотностью вероятности перехода  $\lambda_{ij}$ , представляющей интенсивность потока событий, переводящую систему из одного состояния в другое, причем поток событий (в нашем случае – поток выстрелов по цели) рассматриваем как простейший, распределенный по закону Пуассона [2, 3].

Простейший поток событий удовлетворяет следующим условиям [4]:

1) *стационарности* – т.е. интенсивность потока выстрелов должна оставаться постоянной ( $\lambda = \text{const}$ );

2) *ординарности* – т.е. два и более выстрела в цель за малый промежуток времени маловероятны (условие ординарности сохраняется, если одну цель одновременно в момент времени  $t_n$  поражает одна ПТС);

3) *отсутствия последствия* – т.е. предыдущий выстрел не должен сказываться на результате последующего или вероятности последствия предыдущего.

Рассмотрим систему, состоящую из двух целей. Обозначим через  $S_0$  – состояние системы, когда все цели невредимы;  $S_1$  – уничтожена одна из них;  $S_2$  – уничтожены две цели. Обозначив вероятности состояний как функции времени  $t$  соответственно через  $P_0(t)$ ,  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ , можно построить соответствующий ориентированный граф системы (рис.).

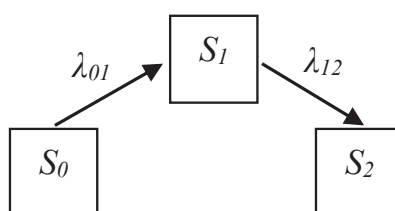


Рис. Граф состояний системы из двух целей

Используя дифференциальные уравнения Колмогорова [4], для любого времени  $t$  можно записать следующую систему вероятностей состояний системы, состоящей из двух целей:

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda_{01}P_0, \\ \frac{dP_1}{dt} = \lambda_{01}P_0 - \lambda_{12}P_1, \\ \frac{dP_2}{dt} = \lambda_{12}P_1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\lambda_{ij}$  – интенсивность потока атак.

Левая часть каждого уравнения содержит производную вероятности состояния, а правая – столько членов, сколько ребер связано с данным состоянием. Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода  $\lambda_{ij}$  на вероятность  $P_i(t)$  того состояния, из которого исходит ребро.

Поскольку в начальный момент ( $t=0$ ) все цели невредимы, то начальными условиями для системы дифференциальных уравнений (1) будут

$$P_0(0)=1, P_1(0)=P_2(0)=0. \quad (2)$$

Исследование уравнений (1) сводится к аналитическому или численному решению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В частности, принимая, что интенсивности потоков атак являются постоянными величинами, т.е.  $\lambda_{ij} = \lambda = const$ , необходимо решить следующую автономную задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0(t), & P_0(0) = 1, \\ \frac{dP_1}{dt} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t), & P_1(0) = 0 \\ \frac{dP_2}{dt} = \lambda P_1(t), & P_2(0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

При этом, естественно, для любого момента времени  $t$  сумма вероятностей состояний должна удовлетворять равенству полноты вероятностей, т.е.

$$\sum_{i=0}^2 P_i(t) = 1. \quad (4)$$

Интегрируя систему уравнений (3) при данных начальных условиях, нетрудно найти искомые вероятности:

$$\begin{cases} P_0(t) = e^{-\lambda t}, \\ P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}, \\ P_2(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}. \end{cases} \quad (5)$$

Анализируя графики функции  $P_0(t) = e^{-\lambda t}$  при  $\lambda = \overline{1,4}$ , можно заключить, что вероятность состояния, при котором цели невредимы, плавно снижается по экспоненциальному закону и менее чем за 4 минуты опускается до нуля.

Исследуя графики функции  $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$  при  $\lambda = \overline{1,4}$ , можно увидеть точки максимумов, соответствующие максимальным вероятностям  $P$ , для нахождения которых необходимо исследовать функцию на экстремум. Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

Исследуем частные случаи при различных  $\lambda$ . Найдем первую производную функции:  $P_1'(t) = \lambda e^{-\lambda t} (1 - \lambda t)$ . Приравниваем производную нулю и при  $\lambda = \overline{1,4}$  находим абсциссы критических точек. Находим вторую производную:  $P_1''(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t} (\lambda t - 2)$ , и убеждаемся, что в критических точках  $P_1''(t) < 0$ . Поскольку достаточным признаком существования экстремума функции является знак второй производной, то при  $\lambda = \overline{1,4}$  функция  $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$  в критических точках имеет максимум, равный  $P = 0,37$ .

Анализируя графики функции  $P_2(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$ , можно увидеть, что в течение трех минут обе цели будут уничтожены с вероятностью, близкой 1. И лишь при интенсивности потока стрельбы  $\lambda = 1$  выстрел/мин. цели будут уничтожены в течение шести минут со времени начала стрельбы.

При  $t \rightarrow \infty$  в системе  $S$  устанавливается некоторый предельный стационарный режим, при котором вероятности  $P_i(t)$  будут стремиться к пределам, называемым *предельными вероятностями состояний* [4], т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t) = P_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Для вычисления предельных вероятностей необходимо в системе уравнений (1) приравнять все левые части, т.е. производные, нулю. Так как в предельном (установившемся) режиме все *вероятности состояний постоянны*, значит, их производные равны нулю. Следовательно, система дифференциальных уравнений (1) превращается в систему линейных однородных уравнений.

Из системы дифференциальных уравнений (1) следует

$$\begin{cases} -\lambda_{01}P_0 = 0, \\ \lambda_{01}P_0 - \lambda_{12}P_1 = 0, \\ \lambda_{12}P_1 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

при которой также должно соблюдаться условие полноты вероятностей:

$$\sum_{i=0}^2 P_i = 1. \quad (8)$$

Для получения решения однородной системы линейных алгебраических уравнений (7) необходимо одно из уравнений системы заменить на соотношение (8) и, задаваясь численными значениями интенсивностей потока выстрелов  $\lambda$ , найти искомые вероятности. Найденные значения вероятностей покажут среднюю долю (процент) пребывания системы в состоянии  $S_i$ .

Решая систему уравнений (7) и исходя из (8), получим предельные вероятности  $P_i$ :

$$P_0 = P_1 = 0, P_2 = 1.$$

Исследуя функции (5), можно сделать следующий вывод: **при  $P = \text{const}$  время живучести цели обратно пропорционально интенсивности потока стрельбы.** Действительно, имеем  $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ , откуда

$$t = -\frac{\ln P_0}{\lambda} > 0.$$

Рассматривая описанную выше систему из двух целей, можно для нее применить формулу Литтла [4], справедливую для любой системы массового обслуживания (марковской, немарковской и т.д.):

$$T_{cp} = \frac{N_{cp}}{\lambda},$$

где  $T_{cp}$  – среднее время пребывания заявки в системе;  $N_{cp}$  – среднее число заявок;  $\lambda$  – интенсивность потока заявок.

Заметим, что представленная на рисунке модель упрощена в соответствии с [1] и предполагает, что:

- цели будут уничтожены с первого попадания;
- ответная стрельба отсутствует.

### Выводы

1. Максимальная вероятность поражения цели (или целей) не зависит от интенсивности потока выстрелов.

2. Время жизни целей, а следовательно, и их живучесть обратно пропорциональны интенсивности потока стрельбы.

Таким образом, при определенном упрощении входных параметров математическая модель на основе марковских цепей позволяет с приемлемой точностью получать временно-вероятностные характеристики различных систем, в том числе и систем из двух целей. Адекватность разработанной математической модели задачи 2а курса КПА-2012 соответствует практическим данным, полученным на тренажере по стрельбе прямой наводкой [5].

Применен математический аппарат марковских процессов для решения задач артиллерии и предложена математическая модель для определения вероятностей огневого поражения системы целей при стрельбе из противотанковых систем. Аналитическим методом найдены и проанализированы решения дифференциальных уравнений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курс подготовки артиллерии (КПА-2012). Часть II. Дивизион, батарея, взвод, орудие. 2-е изд.- Ереван, 2013. - 160 с.
2. **Костяев Н.И., Кучаров В.Н., Греков А. Ю.** Опознавание объектов в единой системе управления // Армейский сборник: Научный, практико - методический журнал Мин. обороны РФ. - 2011.- №9 (208). -С. 61.  
<http://sc.mil.ru/files/morf/military/archive/09.2011.pdf>
3. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. -13 - е изд. - М.: Наука, 1986. - 544 с.
4. **Вентцель Е.С.** Исследование операций. - М.: Высшая школа, 2000. – 550 с.
5. **Хачатрян Г.Г., Гаспарян Р.С., Ханоян В.Е.** Артиллерийский тренажер для стрельбы прямой наводкой // Айкакан Банак: Военно-научный журнал Министерства обороны РА. - 2012. - N3(73). - С. 103-108, [http://www.mil.am/files/Final%20N3\\_2012.pdf](http://www.mil.am/files/Final%20N3_2012.pdf)

### Հ.Գ. ԽԱԶԱՏՐՅԱՆ, Ռ.Ս. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

#### ՁԱ ԽՆԴՐԻ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆԱՅԻՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Դիտարկվում են երկու նշանակետերի վրա հակատանկային համակարգերից հրաձգության հավանականային գործընթացները: Տրվում է նշանակետերի վրա հրաձգության վերաբերյալ պարզագույն իրադարձությունների հոսքի սահմանումը, առաջարկվում է հրաձգության հավանականային գործընթացների մաթեմատիկական մոդելը՝ կառուցված Մարկովի շղթաների հիման վրա: Բերված է դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի անալիտիկ լուծումը:

**Առանցքային բառեր.** հրետանի, հրաձգություն, հավանականության տեսություն, զանգվածային սպասարկման տեսություն, Մարկովի շղթաներ, մաթեմատիկական մոդելավորում:

H.G. KHACHATRYAN, R.S. GASPARYAN

## INVESTIGATING THE PROBABILISTIC PROCESSES OF THE TASK 2A

The probabilistic processes of shooting at two targets from antitank systems are considered. The definition of the elementary stream of events concerning the shooting on targets is introduced. Mathematical models of probabilistic processes of shooting constructed on the basis of Markov chains are proposed. The analytical solution of the differential equation system is introduced.

**Keywords:** artillery, shooting, the probability theory, the theory of mass service, Markov chains, mathematical modeling.

ՀՏԴ 621.52+511.52

### Վ.Ա. ԴՈՂՈՍՅԱՆ

#### ԱՌՑԱՆՑ ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՀԱՐԹԱԿԻ ՎԵՐ ԾԱՌԱՅՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Նախագծվել և մշակվել է Web API՝ առցանց մաթեմատիկական հարթակի համար, որի միջոցով այն կարելի ինտեգրել այլ ծրագրային ապահովումների հետ:

**Առանցքային բառեր.** վեբ ծառայություն, տվյալների ձևաչափեր, առցանց API:

**Ներածություն:** Ցանցային տեխնոլոգիաների և համացանցի զարգացմանը զուգընթաց աճում են նաև առցանց տեղեկատվության ծավալները: Ժամանակակից վեբ տեխնոլոգիաները թույլ են տալիս կազմակերպել ինչպես մարդ-մեքենա, այնպես էլ մեքենա-մեքենա համալիրներ, որոնք իրականացնում են ինչպես տվյալների տրամադրման, այնպես էլ պահպանման ու մշակման գործառնություններ:

Դասական վեբում օգտվողը, դիտարկիչի միջոցով հարցում կատարելով վեբ սերվերին, ստանում է ձևայնացված, ընթերցելի վեբ էջեր, որոնք կազմվում են HTML-ով (Hypertext Markup Language): Սակայն ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաներում տվյալների փոխանակում իրականացնում են ոչ միայն դիտարկիչները:

**Վեբ ծառայություններ:** Երկու ծրագրային ապահովումներ կամ սարքավորումներ ցանցով տվյալներ կարող են փոխանակել վեբ ծառայությունների միջոցով: Համաձայն W3C-ի (World Wide Web Consortium) սահմանման՝ վեբ ծառայությունը ծրագրային համակարգ է մշակված ցանցի միջոցով մեքենա-մեքենա փոխգործունեությունն ապահովելու համար [1]: Վեբ ծառայությունների կիրառման արդյունքում հնարավորություն է ստեղծվում կազմակերպել տարբեր ծրագրավորման լեզուներով, իրարից տարբերվող ճարտարապետություններով մշակված ծրագրերի միջև տվյալների փոխանակում: Այդ նպատակով տարբեր համակարգերի միջև պետք է սահմանված (համաձայնեցված) լինեն որոշակի կանոններ: