

Р.В. ДАЛЛАКЯН

О МНОЖЕСТВЕ НУЛЕЙ КЛАССОВ ТИПА ДИРИХЛЕ

Доказывается, что если последовательность удовлетворяет условию Бляшке и находится в углу Штольца, то является множеством нулей для классов D_s^2 для любого $s \in (0,1)$. Доказывается еще несколько других утверждений.

Ключевые слова. классы типа Дирихле, угол Штольца, множество Карлесона, произведение Бляшке, классы A_α^p .

R.V. DALLAKYAN

A SET OF ZEROES OF THE DIRICHLET TYPE CLASSES

It is proved that the arbitrary sequence which belongs to Stolz angle and satisfies the Blaschke condition, is the set of zeroes of the function from the class D_s^2 for arbitrary $s \in (0,1)$. Some other results are also proved.

Keywords: Dirichlet type class, Stolz angle, Carleson set, Blaschke product, A_α^p – class.

УДК 517.946

Г.С. СУКИАСЯН

ОСОБЕННОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Изучены особенности кусочно-линейной аппроксимации численных решений краевых задач математической физики. При этом возникают системы уравнений, зависящие от сеток треугольников. Найдено условие на ядро задачи, выполнение которого достаточно, чтобы оптимальной сеткой была триангуляция Делоне. Результаты проиллюстрированы примерами численного решения полевых задач для электромагнитных систем с магнитореологической жидкостью.

Ключевые слова: кусочно-линейная аппроксимация, задача Дирихле, электромагнитное поле, триангуляция Делоне.

Рассмотрим следующую краевую задачу: какая функция $F(x,y)$ минимизирует заданный функционал $W(F)$ вида

$$W(F) = \iint_D K(F(x,y)) dx dy,$$

где D - выпуклая ограниченная область на плоскости; K - заданное интегрируемое ядро? Например, ядро Максвелла для решения задачи электромагнитного поля:

$$K(F(x, y)) = \left(m(x, y) \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(m(x, y) \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right)^2 + J(x, y)F(x, y), \quad (1)$$

где $m(x, y)$ и $J(x, y)$ - заданные функции на плоскости, т.н. параметры среды.

Аппроксимируем решение нашей краевой задачи при помощи кусочно-линейных приближений. Проекция графика двумерной непрерывной кусочно-линейной функции на координатную плоскость OXY образует сетку, состоящую из треугольников.

В статье даны ответы на следующие два вопроса:

- 1) для каких функционалов наиболее целесообразным подходом является численное решение задачи с помощью кусочно-линейных приближений;
- 2) для каких функционалов оптимальной сеткой является триангуляция Делоне?

Результаты проиллюстрированы примерами численного решения полевых задач для электромагнитных систем с магнитореологической жидкостью.

На рис. 1 показан график типичной двумерной непрерывной кусочно-линейной функции. Проекция этого графика на координатную плоскость OXY образует мозаику T , состоящую из треугольников.

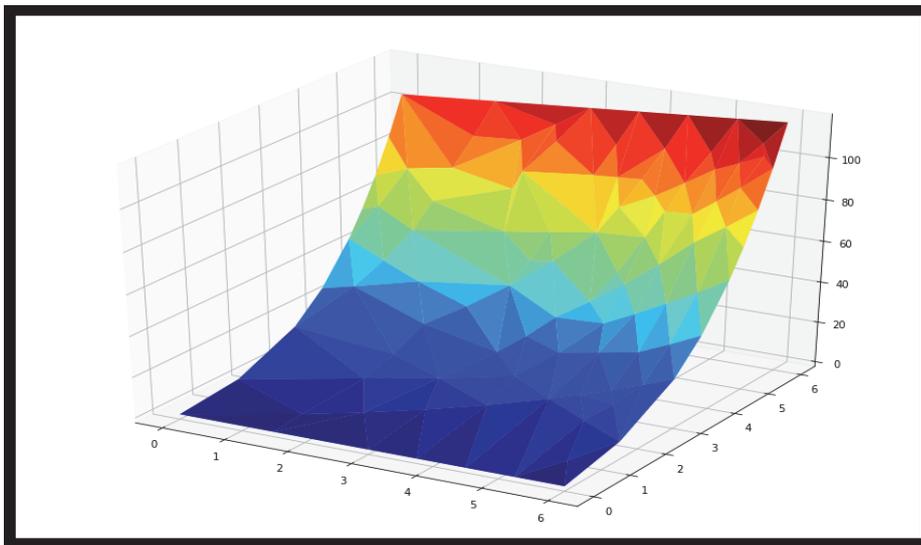


Рис. 1. График типичной кусочно-линейной функции

Пусть мозаика T имеет n внутренних (неграничных) узлов P_1, P_2, \dots, P_n . Каждая непрерывная кусочно-линейная функция $F_T(x, y)$, соответствующая триангуляции T , однозначно определяется значениями Z_1, Z_2, \dots, Z_n функции во внутренних узлах P_1, P_2, \dots, P_n и граничным условием. Поэтому минимизация функционала $W(F)$ сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial W(F(T, Z_1, Z_2, \dots, Z_n))}{\partial Z_k} = 0, k=1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Заметим, что в системе уравнений (2) неизвестными являются значения Z_k функции $F(T)$ во внутренних узлах P_1, P_2, \dots, P_n мозаики T . Число неизвестных n равно количеству уравнений и количеству внутренних узлов мозаики.

В практических задачах число узлов сетки (а значит, и число уравнений) может быть огромным, вплоть до нескольких миллионов. Поэтому приходится решать систему уравнений (2) численно методом последовательных итераций. Известный принцип доминирования диагонали (см. [1]) утверждает, что чем меньше сумма недиагональных элементов матрицы системы, тем быстрее сходится итерационный процесс. В идеальном случае, когда все недиагональные элементы равны нулю, система решается за одну итерацию.

Отметим, что ошибка, возникающая из-за аппроксимации точного решения нашей задачи кусочно-линейным приближением и приближенным решением системы уравнений (2), существенно зависит от геометрии сетки T . Следовательно, сетки бывают хорошими (которым соответствуют малые ошибки) и плохими. Также и скорость сходимости итерационного процесса решения зависит не только от количества и положения сеточных узлов, но и от геометрии связей вершин сетки, т.е. от списка пар соседних узлов.

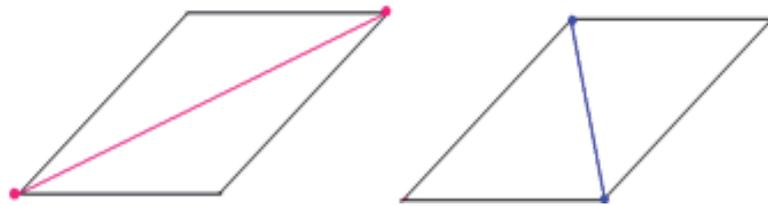


Рис. 2. Сетки из 4-ех узлов

Рассмотрим простейшую сетку, состоящую из четырех узлов и двух треугольников. Возможны два варианта триангуляций (см. рис. 2). Вопрос: какая из двух сеток лучше - левая или правая? Заметим, что правая сетка “с именем”, она называется сеткой Делоне. Ответ зависит от задачи, т.е. от функционала $W(F)$. Возникает вопрос: для каких функционалов независимо от количества и положения сеточных узлов оптимальной сеткой является триангуляция Делоне?

Мы используем следующее экстремальное свойство сеток из треугольников (см. [2]):

Теорема 1. Сумма котангенсов внутренних углов всех треугольников сетки как функция от триангуляции с фиксированным набором узлов достигает своего минимума для триангуляции Делоне.

Используя теорему 1, получаем следующее достаточное условие.

Теорема 2. Если функционал $W(F)$ для любой пары соседних внутренних узлов P_i и P_j удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 W(F(T, Z_1, Z_2, \dots, Z_n))}{\partial Z_i \partial Z_j} = \cot v_{ij}, \quad (3)$$

то независимо от количества и положения сеточных узлов оптимальной сеткой для минимизации этого функционала является триангуляция Делоне.

Угол v_{ij} показан на рис. 3.

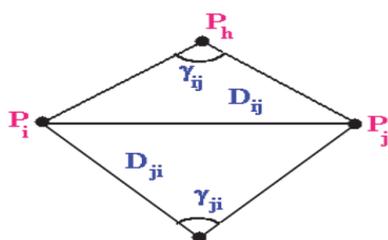


Рис. 3. Угол v_{ij}

Отметим, что ядро Максвелла (1) удовлетворяет условию (3).

Результаты проиллюстрируем примером численного решения полевой задачи для электромагнитной системы с магнитореологической жидкостью (см. [3]). На рис. 4 показано кусочно-линейное приближение к распределению скалярного электромагнитного потенциала, полученное путем решения системы уравнений (1), а на рис. 5 - соответствующая триангуляция Делоне.

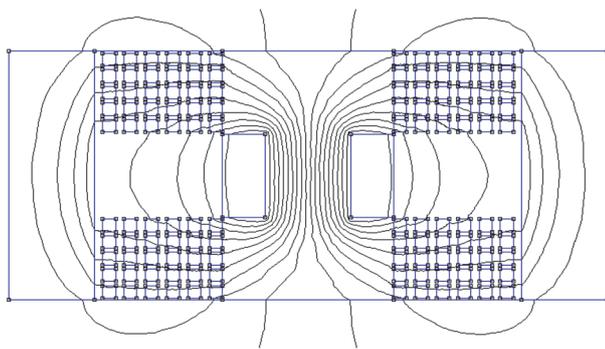


Рис. 4. Кусочно-линейная аппроксимация электромагнитного поля

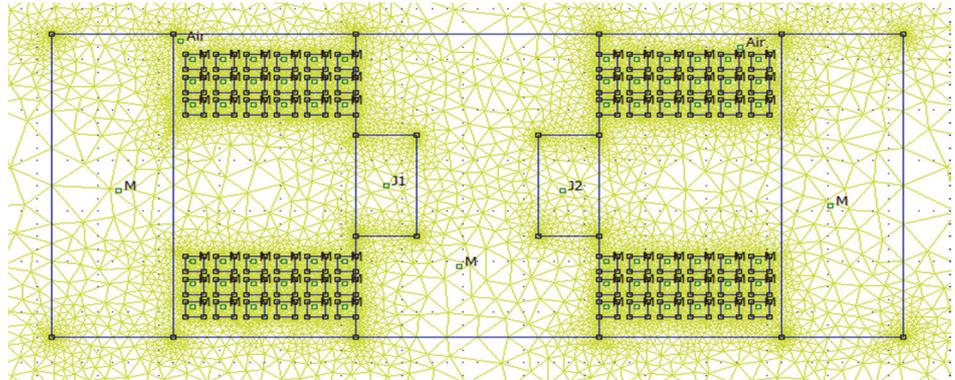


Рис. 5. Соответствующая триангуляция Делоне

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию и науке РА, грант 21Т-2В256.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Briggs K.** Diagonally Dominant Matrix, MathWorld--A Wolfram Web Resource, created by E.W. Weisstein, <https://mathworld.wolfram.com/DiagonallyDominantMatrix.html>
2. **Sukiasyan H.S.** On Extremal Property of the Sum of Cotangents and its Applications in Mathematical Physics // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. - Vol. 40 (8). - P. 1137—1140.
3. **Մելքոնյան Տ. Ռ.** Մագնիսառեղոգիական հեղուկով համակարգի մագնիսական դաշտի մոդելավորումը FEMM միջավայրում // ՀՃԱ Լրաբեր. - 2023.- Հատոր 20, № 1. - էջ 34-40:

Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

ԿՏՈՐ-ԳԾԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ԱՌԱՆՁՆԱՀԱԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՐԿՉԱՓ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ԴԵՊՈՒՄ

Ուսումնասիրվել են մաթեմատիկական ֆիզիկայի եզրային խնդիրների թվային լուծումների կտոր-գծային մոտարկման առանձնահատկությունները: Այս դեպքում առաջանում են հավասարումների համակարգեր, որոնք կախված են եռանկյունիների ցանցերից: Գտնվել է պայման խնդրի կորիզի վրա, որի կատարումը բավարար է, որպեսզի լավագույն ցանցը լինի Դելոնեի եռանկյունապատումը: Արդյունքները փորձարկվել են մագնիսառեղոգիական հեղուկով էլեկտրամագնիսական համակարգերի դաշտային խնդրի թվային լուծման օրինակով:

Առանցքային բառեր. կտոր-գծային մոտարկում, Դիրիխլեի խնդիր, էլեկտրամագնիսական դաշտ, Դելոնեի եռանկյունապատում:

H.S. SUKIASYAN

**THE FEATURES OF PIECEWISE LINEAR APPROXIMATION AT
NUMERICAL SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE
PROBLEMS**

The features of piecewise linear approximation of numerical solutions to boundary value problems of mathematical physics are studied. In this case, systems of equations arise that depend on the mesh of triangles. A condition has been found for the kernel of the problem, the fulfillment of which is sufficient for the optimal mesh to be the Delaunay triangulation. The results are illustrated by examples of numerical solutions of field problems for electromagnetic systems with magnetorheological fluid.

Keywords: piecewise linear approximation, Dirichlet problem, electromagnetic field, Delaunay triangulation.

ՀՏԴ 514

Պ.Մ. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

**ՀԱՐԹԱԶԱՓՈՒԹՅԱՆ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԻ
ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԱՆՀԱԿԱՍԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ, ԱՆԿԱԽՈՒԹՅՈՒՆԸ,
ԼՐԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ
(Գյումրի)**

Ապացուցվում է, որ Σ_T աքսիոմների համակարգի բոլոր աքսիոմները հանդիսանում են ճշմարիտ պնդումներ Վեյլի երկրաչափությունում: Նշանակում է Σ_T աքսիոմների համակարգն անհակասելի է, եթե անհակասելի է իրական թվերի թվաբանությունը, Σ_T համակարգի աքսիոմները չեն բավարարում անկախության, լրիվության պահանջները:

Առանցքային բառեր. անհակասելիություն, անկախություն, լրիվություն, հարթաչափության դպրոցական դասընթաց:

Ներածություն: Աքսիոմների ցանկացած համակարգին ներկայացվում է երեք պահանջ՝ անհակասելիություն, անկախություն, լրիվություն:

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացի տեսական հիմունքների կառուցման նկատմամբ տարբեր մոտեցումներ գոյություն ունեն: Երկրաչափության դպրոցական դասընթացում ներկայումս հիմնավորապես արտահայտված է տարրական երկրաչափության կառուցման սխեման ըստ Հիլբերտի [1, էջ՝ 125-130]: Ընդ որում, որոշ արտածումներ ու դատողություններ բավականաչափ պարզեցված են:

Ուստի նպատակահարմար է դիտարկել հարթաչափության դպրոցական դասընթացի Σ_T աքսիոմների համակարգի անհակասելիության, աքսիոմներից յուրաքանչյուրի՝ մյուսներից անկախության, լրիվության վերաբերյալ խնդիրը: