

H.S. SUKIASYAN

**THE FEATURES OF PIECEWISE LINEAR APPROXIMATION AT
NUMERICAL SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE
PROBLEMS**

The features of piecewise linear approximation of numerical solutions to boundary value problems of mathematical physics are studied. In this case, systems of equations arise that depend on the mesh of triangles. A condition has been found for the kernel of the problem, the fulfillment of which is sufficient for the optimal mesh to be the Delaunay triangulation. The results are illustrated by examples of numerical solutions of field problems for electromagnetic systems with magnetorheological fluid.

Keywords: piecewise linear approximation, Dirichlet problem, electromagnetic field, Delaunay triangulation.

ՀՏԴ 514

Պ.Մ. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

**ՀԱՐԹԱԶԱՓՈՒԹՅԱՆ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԻ
ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԱՆՀԱԿԱՍԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ, ԱՆԿԱԽՈՒԹՅՈՒՆԸ,
ԼՐԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ
(Գյումրի)**

Ապացուցվում է, որ Σ_T աքսիոմների համակարգի բոլոր աքսիոմները հանդիսանում են ճշմարիտ պնդումներ Վեյլի երկրաչափությունում: Նշանակում է Σ_T աքսիոմների համակարգն անհակասելի է, եթե անհակասելի է իրական թվերի թվաբանությունը, Σ_T համակարգի աքսիոմները չեն բավարարում անկախության, լրիվության պահանջները:

Առանցքային բառեր. անհակասելիություն, անկախություն, լրիվություն, հարթաչափության դպրոցական դասընթաց:

Ներածություն: Աքսիոմների ցանկացած համակարգին ներկայացվում է երեք պահանջ՝ անհակասելիություն, անկախություն, լրիվություն:

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացի տեսական հիմունքների կառուցման նկատմամբ տարբեր մոտեցումներ գոյություն ունեն: Երկրաչափության դպրոցական դասընթացում ներկայումս հիմնավորապես արտահայտված է տարրական երկրաչափության կառուցման սխեման ըստ Հիլբերտի [1, էջ՝ 125-130]: Ընդ որում, որոշ արտածումներ ու դատողություններ բավականաչափ պարզեցված են:

Ուստի նպատակահարմար է դիտարկել հարթաչափության դպրոցական դասընթացի Σ_T աքսիոմների համակարգի անհակասելիության, աքսիոմներից յուրաքանչյուրի՝ մյուսներից անկախության, լրիվության վերաբերյալ խնդիրը:

Առաջին հիմնական հասկացությունները, որոնց ծանոթանում են դպրոցականները երկրաչափության դասընթացն ուսումնասիրելիս, «կետ» և «ուղիղ» հասկացություններն են: Հիմնական հասկացությունների սահմանումները չեն տրվում, նրանց հատկություններն արտահայտվում են աքսիոմների միջոցով: Օգտագործելով հիմնական հասկացություններն ու աքսիոմները՝ սահմանվում են նոր հասկացություններ, ձևակերպվում և ապացուցվում են թեորեմներ, և այդպիսով կատարվում է երկրաչափական պատկերների հատկությունների ուսումնասիրությունը:

Ինչպես հարթաչափության, այնպես էլ տարածաչափության կառուցման համար անհրաժեշտ ոչ բոլոր աքսիոմներն են բերված երկրաչափության դպրոցական դասընթացում [1, 2, 3, 4, 5, 6]: Դրանցից մի քանիսը թեև օգտագործվում են, սակայն չեն ձևակերպվում՝ շարադրանքը չբարդացնելու նպատակով: Հարթաչափության դպրոցական դասընթացի աքսիոմների համակարգը՝ Σ_7 , կազմված է տասնվեց աքսիոմներից [1, էջ՝ 125]:

Σ_7 աքսիոմների համակարգն անհակասելի է: Իրոք, նախ ցույց տանք, որ դ-երկրաչափության հիմնական հասկացությունները կարող են սահմանվել Վեյլի երկրաչափությունում: Վեյլի երկրաչափությունում դ-կետ կանվանենք յուրաքանչյուր վ-կետը, իսկ դ-ուղիղ՝ յուրաքանչյուր վ-ուղիղ բոլոր կետերի բազմությունը: Դ-հեռավորություններ ասելով կհասկանանք վ-հեռավորությունները: Այսպիսի համաձայնությունների դեպքում հեշտ է ցույց տալ, որ Σ_7 աքսիոմների համակարգի բոլոր աքսիոմները հանդիսանում են ճշմարիտ պնդումներ Վեյլի երկրաչափությունում: Այս պնդումն ապացուցենք աքսիոմներից յուրաքանչյուրի համար:

1. *Յուրաքանչյուր ուղիղ պատկանում է առնվազն երկու կետ:*

Այս աքսիոմի ճշմարտացիությունը Վեյլի երկրաչափությունում հետևում է ուղիղ սահմանումից [7, էջ՝175, §6. 1.]:

2. *Գոյություն ունեն մի ուղիղ վրա չգտնվող առնվազն երեք կետեր:*

Դիցուք Π որոշակի հարթություն է, $A \in \Pi$ և \vec{p} ու \vec{q} Π^0 երկչափ ենթատարածության բազիս են կազմում: Ըստ աքսիոմ 1-ի՝ գոյություն ունեն այնպիսի P և Q կետեր, որոնք բավարարում են $\overrightarrow{AP} = \vec{p}$ և $\overrightarrow{AQ} = \vec{q}$ պայմանները: Քանի որ $\vec{p}, \vec{q} \in \Pi^0$, ուստի $P, Q \in \Pi$: Տույց տանք, որ A, P և Q կոլինեար չեն, այսինքն՝ գոյություն չունի այդ երեք կետերը պարունակող ուղիղ: Դիցուք, ընդհակառակը, \vec{a} ուղղորդ վեկտորով և M_0 կետով անցնող l ուղիղը պարունակում է այդ կետերը, այսինքն՝ $A \in l, P \in l, Q \in l$: Հետևաբար, $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{a}, \overrightarrow{AQ} \parallel \vec{a}$, այսինքն՝ $\vec{p} \parallel \vec{q}$, որը հակասում է \vec{p} և \vec{q} վեկտորների ընտրության պայմանին:

3. *Ցանկացած երկու կետերով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:*

Դիցուք այդ կետերն են A և B : Հեշտ է տեսնել, որ $a = \{A, \overrightarrow{AB}\}$ ուղիղն անցնում է A և B կետերով: Դիցուք b -ն ինչ-որ ուղիղ է, որը նույնպես անցնում է A և

B կետերով՝ $A \in b, B \in b$: Հետևաբար, \overline{AB} կհանդիսանա b ուղղի ուղղորդ վեկտոր: Այսպիսով, b -ն անցնում է A կետով, և \overline{AB} վեկտորը հանդիսանում է նրա ուղղորդ վեկտոր, հետևաբար՝ a և b համընկնում են:

4. *Ուղղի երեք կետերից մեկը, ընդ որում՝ միայն մեկը, ընկած է մյուս երկուսի միջև:*

Դիցուք այդ կետերն են A, B, C : Դիտարկենք $\overline{AB}, \overline{BC}$ և \overline{CA} վեկտորները: Եթե $\overline{AB} = k\overline{BC}$, $k > 0$, ապա $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = (k + 1)\overline{BC}$ և $\overline{AB} = \frac{k}{k+1}\overline{AC}$, որտեղ $0 < \frac{k}{k+1} < 1$: Հետևաբար, տեղի ունի $\mu(ABC)$: Համանմանորեն են դիտարկվում նաև մյուս հնարավոր դեպքերը:

5. *Ուղղի յուրաքանչյուր O կետն այն տրոհում է երկու մասի (ճառագայթների) այնպես, որ միևնույն ճառագայթի ցանկացած երկու կետեր ընկած են O կետի միևնույն կողմում, իսկ փարբեր ճառագայթների ցանկացած երկու կետեր՝ O կետի փարբեր կողմերում:*

O սկզբնակետով բաց ճառագայթը, որն անցնում է N կետով, սահմանվում է որպես $\{M | \overline{OM} = t\overline{ON}, t > 0\}$ կետերի բազմություն: Դիցուք \overline{OA} և \overline{OB} a ուղղի ուղղություններն են, իսկ (O, \overline{OA}) և (O, \overline{OB}) O սկզբնակետով բաց ճառագայթներ են՝ որոշված այդ ուղղություններով: Յուրաքանչյուր, որ այդ ճառագայթների կետերի բազմությունները բավարարում են պնդման պայմանները: Իրոք, եթե A և B տարբեր կետերը պատկանում են միևնույն ճառագայթին, ապա $\overline{OA} = t_1\overline{ON}, t_1 > 0$ և $\overline{OB} = t_2\overline{ON}, t_2 > 0$: Հետևաբար, $\overline{OA} = t\overline{OB}, t > 0$: Եթե $0 < t < 1$, ապա տեղի ունի $\mu(OAB)$ [7, էջ՝ 176, §6. 3.], իսկ եթե $t > 1$, ապա $\overline{OB} = \frac{1}{t}\overline{OA}$, $0 < \frac{1}{t} < 1$ և տեղի ունի $\mu(OBA)$ ($t \neq 1$, քանի որ $A \neq B$), այսինքն՝ A ու B կետերն ընկած են O -ի միևնույն կողմում:

Եթե A և B պատկանում են տարբեր ճառագայթների, ապա $\overline{OA} = t\overline{OB}, t < 0$: Հետևաբար, $\overline{AO} = t'\overline{OB}, t' > 0$, $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = (t' + 1)\overline{OB}$ և $\overline{AO} = \frac{t'}{t'+1}\overline{AB}$, որտեղ $0 < \frac{t'}{t'+1} < 1$: Ուստի տեղի ունի $\mu(AOB)$: Այսինքն՝ A և B կետերն ընկած են O կետի տարբեր կողմերում:

6. *Յուրաքանչյուր a ուղիղ տրոհում է հարթությունը երկու մասի (կիսահարթությունների) այնպես, որ միևնույն կիսահարթության ցանկացած երկու կետեր ընկած են a ուղղի միևնույն կողմում, իսկ փարբեր կիսահարթությունների ցանկացած երկու կետեր ընկած են a ուղղի փարբեր կողմերում:*

Դիտարկենք a սահմանով երկու բաց կիսահարթությունները: Եթե A ու B կետերը պատկանում են տարբեր կիսահարթությունների, ապա $[AB]$ հատվածն ունի a ուղղի հետ մեկ և միայն մեկ ընդհանուր ներքին կետ [8, էջ՝ 244]: Հետևաբար, A ու B ընկած են a ուղղի տարբեր կողմերում: Իսկ եթե A ու B կետերը

պատկանում են միևնույն կիսահարթությանը, ապա $[AB]$ հատվածը չունի a ուղղի հետ ոչ մի ընդհանուր կետ [8, էջ՝ 245], հետևաբար, A ու B ընկած են a ուղղի միևնույն կողմում:

7. Եթե վերադրելիս երկու հատվածների ծայրակետերը համընկնում են, ապա համընկնում են նաև իրենք՝ հատվածները:

Այս պնդման ապացույցը հետևում է հատվածի սահմանումից [7, էջ՝ 176, §6. 3.]:

8. Ցանկացած ճառագայթի վրա նրա սկզբնակետից կարելի է տեղադրել տրվածին հավասար հատված, ընդ որում՝ միայն մեկը:

9. Ցանկացած ճառագայթից տրված կիսահարթության մեջ կարելի է տեղադրել տրված չփոփած անկյանը հավասար անկյուն, ընդ որում՝ միայն մեկը:

10. Ցանկացած hk անկյուն կարելի է վերադրմամբ համընկեցնել իրեն հավասար h_1k_1 անկյանը այնպես, որ՝

1) h ճառագայթը համընկնի h_1 ճառագայթին, իսկ k ճառագայթը՝ k_1 ճառագայթին,

2) h ճառագայթը համընկնի k_1 ճառագայթին, իսկ k ճառագայթը՝ h_1 ճառագայթին:

8, 9, 10 պնդումներն ապացուցված են [7]–ի, բաժին 4–ի ենթաբաժին 7–ում (համապատասխանաբար՝ թեորեմ 2, թեորեմ 4, թեորեմ 4–ի հետևանք):

11. Ցանկացած պատկեր հավասար է ինքն իրեն:

12. Եթե Φ պատկերը հավասար է Φ_1 պատկերին, ապա Φ_1 պատկերը հավասար է Φ պատկերին:

13. Եթե Φ_1 պատկերը հավասար է Φ_2 պատկերին, իսկ Φ_2 պատկերը՝ Φ_3 պատկերին, ապա Φ_1 պատկերը հավասար է Φ_3 պատկերին:

11, 12, 13 պնդումների ապացույցը հետևում է այն բանից, որ շարժումները կազմում են խումբ, և համընկնելիությունը հանդիսանում է համարժեքության հարաբերություն բոլոր պատկերների բազմությունում:

14. Ցանկացած հատվածի երկարությունը՝ ըստ հատվածների չափման ընդհանուր միավորի, արտահայտվում է դրական թվով:

Ըստ Վեյլի 3–րդ աքսիոմի՝ V տեղափոխությունների տարածությունը հանդիսանում է էվկլիդեսյան վեկտորական տարածություն, այսինքն՝ նրանում որոշված է $g(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ դրական երկգծային δ (վեկտորների սկալյար արտադրյալ): $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ թիվը կանվանենք \vec{x} –ի նորմ: L նշանակենք բոլոր հատվածների բազմությունը, իսկ R_+^* ՝ բոլոր դրական իրական թվերի բազմությունը: Դիտարկենք $f: L \rightarrow R_+^*$ արտապատկերումն ըստ՝

$$f([AB]) = |\overline{AB}|, \forall [AB] \in L$$

օրենքի [7, էջ՝ 211]: $f([AB])$ կանվանենք $[AB]$ հատվածի երկարություն: Հետևաբար, ցանկացած հատվածի երկարությունն արտահայտվում է դրական թվով:

15. Հատվածների չափման ընդհանուր միավորի դեպքում ցանկացած դրական թվի համար գոյություն ունի հատված, որի երկարությունն արտահայտվում է այդ թվով:

Եթե տրված է միավոր հատված, ապա գոյություն ունի $[AB]$ հատված, որի երկարությունը հավասար է մեկի: Դիցուք α կամայական դրական թիվ է: Դիտարկենք (AB) ուղղի վրա այնպիսի C կետ, որ $\overline{AC} = \alpha \overline{AB}$, կունենանք $|\overline{AC}| = \alpha |\overline{AB}| \Rightarrow f([AC]) = \alpha f([AB]) = \alpha$:

16. Տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ:

Կատարենք հակասող ենթադրություն: Ենթադրենք՝ a ուղղի վրա չգտնվող M_0 կետով անցնում են երկու d_1 և d_2 տարբեր ուղիղներ՝ զուգահեռ a -ին: Դիցուք a ուղղի ուղղորդ վեկտորն է \vec{m} : Ըստ ուղղի սահմանման [7, էջ՝ 175, §6.1.]

$$d_1 = \{M | \overline{M_0M} = \alpha \vec{p}, \alpha \in R\}, d_2 = \{N | \overline{M_0N} = \beta \vec{q}, \beta \in R\}:$$

Քանի որ $d_1 \parallel a \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{m}$, և $d_2 \parallel a \Rightarrow \vec{q} \parallel \vec{m}$:

Հետևաբար, $\vec{p} \parallel \vec{q} \Rightarrow \vec{p} = k\vec{q}, k \in R$: Ստացվում է, որ $\overline{M_0M} = \alpha k \vec{q}$ ($\alpha k \in R$), այսինքն՝ $d_1 = d_2$: Ստացվեց հակասություն, որն էլ ապացուցում է, որ a ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ:

Այսպիսով, ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ: $\Sigma_n \subset \mathfrak{S}(\Sigma_W)$:

Հետևանք: Σ_n աքսիոմների համակարգն անհակասելի է, եթե անհակասելի է իրական թվերի թվաբանությունը:

Σ_n համակարգի աքսիոմները չեն բավարարում անկախության պահանջը: Օրինակ՝ աքսիոմ 5-ի պնդումը կարելի է ապացուցել՝ ելնելով մյուս աքսիոմներից:

5. Ուղղի յուրաքանչյուր O կետն այն տրոհում է երկու մասի (ճառագայթների) այնպես, որ միևնույն ճառագայթի ցանկացած երկու կետեր ընկած են O կետի միևնույն կողմում, իսկ տարբեր ճառագայթների ցանկացած երկու կետեր՝ O կետի տարբեր կողմերում:

Ուղղի վրա դիտարկենք երկու A և B կետերն այնպես, որ տեղի ունենա $\mu(AOB)$: Որպես O կետով առաջացած մի բաց ճառագայթ կարելի է համարել բոլոր այն C կետերի բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի $\mu(OCA)$ կամ $\mu(OAC)$ ՝ միավորած A կետը, իսկ մյուս բաց ճառագայթը՝ բոլոր այն D կետերի բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի $\mu(OBD)$ կամ $\mu(ODB)$ ՝ միավորած B

կետը: Հետևաբար, միևնույն ճառագայթի ցանկացած երկու C' և C'' կետերի համար տեղի ունի $\mu(OC'C'')$ կամ $\mu(OC''C')$, իսկ տարբեր ճառագայթների ցանկացած երկու D' և C' կետերի համար՝ $\mu(D'OC')$:

Աքսիոմ 6-ի պնդումը նույնպես կարելի է ապացուցել:

Փաստորեն, դա նշանակում է, որ այդ պնդումները թեորեմներ են, այլ ոչ թե աքսիոմներ: Միայն շարադրանքի պարզության համար դրանք ընդունվում են իբրև աքսիոմներ:

Σ_n աքսիոմների համակարգը ոչ լրիվ է:

Իրոք, գոյություն ունի A աքսիոմ, որը բավարարում է հետևյալ պայմանները.

ա) A աքսիոմը չի ներառում նոր հարաբերություններ,

բ) այն անկախ է Σ համակարգի աքսիոմներից,

գ) $\Sigma_n \cup \{A\}$ աքսիոմների համակարգն անհակասելի է:

Որպես A աքսիոմ կարելի է դիտարկել, օրինակ, հետևյալ աքսիոմը:

Ցանկացած երկու տարբեր A ու B կետերի համար գոյություն ունի (AB) ուղղին պատկանող այնպիսի C կետ, որ $\mu(ABC)$:

Եզրակացություն: Σ_n աքսիոմների համակարգն անհակասելի է, եթե անհակասելի է իրական թվերի թվաբանությունը: Σ_n համակարգի աքսիոմները չեն բավարարում անկախության պահանջը: Σ_n աքսիոմների համակարգը ոչ լրիվ է:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Երկրաչափություն 9: Դասագիրք հանրակրթ. դպր. 9-րդ դաս. համար/ **Լ.Ս. Աթանասյան, Վ.Ֆ. Բուտուզով և ուրիշներ.** - Եր.: Զանգակ-97, 2013. - 144 էջ:
2. Երկրաչափություն 7: Դասագիրք հանրակրթ. դպր. 7-րդ դաս. համար/ **Լ.Ս. Աթանասյան, Վ.Ֆ. Բուտուզով և ուրիշներ.** - Եր.: Զանգակ-97, 2011. - 128 էջ:
3. Երկրաչափություն 8: Դասագիրք հանրակրթ. դպր. 8-րդ դաս. համար/ **Լ.Ս. Աթանասյան, Վ.Ֆ. Բուտուզով և ուրիշներ.** - Եր.: Զանգակ-97, 2012. - 144 էջ:
4. **Շարիֆին Ի.Ֆ.** Երկրաչափություն: Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 10-րդ դասարանի դասագիրք: - Եր.: Անտարես, 2009. - 128 էջ:
5. **Շարիֆին Ի.Ֆ.** Երկրաչափություն: Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 11-րդ դասարանի դասագիրք: - Եր.: Անտարես, 2010. - 100 էջ:
6. **Շարիֆին Ի.Ֆ.** Երկրաչափություն: Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 12-րդ դասարանի դասագիրք: - Եր.: Անտարես, 2011. - 160 էջ:
7. **Базылев В.Т., Дуничев К.И.** Геометрия. Ч. II. - М.: Просвещение, 1975. - 367 с.
8. **Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б.** Геометрия. Ч. II. - М.: Просвещение, 1976. - 447 с.

Ս.Մ. ՆԱԿԱՊԵՏՅԱՆ

**НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ, НЕЗАВИСИМОСТЬ, ПОЛНОТА
СИСТЕМЫ АКСИОМ ШКОЛЬНОГО КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ**

Доказывается, что все аксиомы системы Σ_{III} являются истинными утверждениями в геометрии Вейля, а значит, система аксиом Σ_{III} непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел, аксиомы системы Σ_{III} не удовлетворяют требованиям независимости, полноты.

Ключевые слова. непротиворечивость, независимость, полнота, школьный курс планиметрии.

P.M. NAHAPETYAN

**CONSISTENCY, INDEPENDENCE, COMPLETENESS OF THE
AXIOMATIC SYSTEM OF THE SCHOOL PLANE GEOMETRY COURSE**

It is proved that all axioms of the Σ_s system are true statements in Weyl's geometry, it means that the system of Σ_s axioms is consistent, if arithmetic of real numbers is it consistent, the axioms of the Σ_s system do not satisfy the requirements of independence, completeness.

Keywords: consistency, independence, completeness, school Plane Geometry course.

ՀՏԴ 512.575

Լ.Ա. ՍԵՆՊՈՍՅԱՆ, Ն.Ս. ԱՍԼԱՆՅԱՆ

**ՀՈՐՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ
ՏԱՐԲԵՐ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ: ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՊԱՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ
ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՄԻՋՈՑՈՎ
(Գյումրի)**

Դիտարկվում են մաթեմատիկայի դասընթացում չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների լուծումների հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները:

Փորձ է արվել՝ առանձնացնելու չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների կոնկրետ տեսակները, որոնց համար նշվում են լուծման կոնկրետ եղանակներ, և որոնց կիրառման արդյունքում չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների լուծումը հանգեցվում է քառակուսի հավասարումների լուծմանը:

Առանցքային բաներ. հանրահաշվական հավասարումներ, խնդիր, մեթոդ, պայման, անորոշություն, տրամաբանություն:

Ներածություն: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում թե՛ հանրահաշվական և թե՛ երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս առաջանում է բարձր կարգի հանրահաշվական հավասարումների լուծման անհրաժեշտություն, որոնց հաղթահարումը կապված է մեծ դժվարությունների հետ: