П.М. НАГАПЕТЯН

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ, НЕЗАВИСИМОСТЬ, ПОЛНОТА СИСТЕМЫ АКСИОМ ШКОЛЬНОГО КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ

Доказывается, что все аксиомы системы $\Sigma_ш$ являются истинными утверждениями в геометрии Вейля, а значит, система аксиом $\Sigma_ш$ непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел, аксиомы системы $\Sigma_ш$ не удовлетворяют требованиям независимости, полноты.

Ключевые слова. непротиворечивость, независимость, полнота, школьный курс планиметрии.

P.M. NAHAPETYAN

CONSISTENCY, INDEPENDENCE, COMPLETENESS OF THE AXIOMATIC SYSTEM OF THE SCHOOL PLANE GEOMETRY COURSE

It is proved that all axioms of the Σ_s system are true statements in Weyl's geometry, it means that the system of Σ_s axioms is consistent, if arithmetic of real numbers is it consistent, the axioms of the Σ_s system do not satisfy the requirements of independence, completeness.

***Keywords**:* consistency, independence, completeness, school Plane Geometry course.

ՀՏԴ 512.575

Լ.Ա. ՍԵԽՊՈՍՅԱՆ, Ն.Ս. ԱՍԼԱՆՅԱՆ

ՉՈՐՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՏԱՐԲԵՐ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ: ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՊԱՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

(Գյումրի)

Դիտարկվում են մաթեմատիկայի դասընթացում չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների լուծումների հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները:

Փորձ է արվել՝ առանձնացնելու չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների կոնկրետ տեսակները, որոնց համար նշվում են լուծման կոնկրետ եղանակներ, և որոնց կիրառման արդյունքում չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների լուծումը հանգեցվում է քառակուսի հավասարումների լուծմանը:

Առանցքային բառեր. հանրահաշվական հավասարումներ, խնդիր, մեթոդ, պայման, անորոշություն, տրամաբանություն:

Ներածություն: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում թե՛ հանրահաշվական և թե՛ երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս առաջանում է բարձր կարգի հանրահաշվական հավասարումների լուծման անհրաժեշտություն, որոնց հաղթահարումը կապված է մեծ դժվարությունների հետ:

Դպրոցական դասընթացում շատ մեծ խորությամբ ուսումնասիրվում են քառակուսի հավասարումների լուծման տարբեր եղանակները [1]: Դասագրքերում վարժությունների տեսքով հանդիպում են տարբեր հավասարումներ, որոնք որոշակի նշանակումներից հետո վերածվում են քառակուսի հավասարումների, ինչպես, օրինակ, չորրորդ աստիճանի երկքառակուսի հավասարումները [2, 3]: Չնայած դրան՝ դասավանդման ընթացքում չի խոսվում կոնկրետ հավասարումների տեսակների մասին, որոնք որոշակի ձևափոխություններից հետո վերածվում են քառակուսի հավասարումների լուծման:

Աշխատանքում փորձ է արվում առանձնացնել չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների կոնկրետ տեսակներ, որոնց համար նշվում են լուծման կոնկրետ եղանակներ, և որոնց կիրառման արդյունքում չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների լուծումը հանգեցվում է քառակուսի հավասարումների լուծման:

Նախ՝ նշենք չորրորդ աստիճանի հավասարումների վերաբերյալ մի քանի հայտնի պնդումներ [4, 5]:

Դիցուք ունենք ամբողջ գործակիցներով հետևյալ հանրահաշվական հավասարումը.

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{1}$$

որտեղ $a, b, c, d, e \in Z, a \neq 0$

Թեորեմ 1. Եթե (1) հավասարումն ունի ամբողջ արմատներ, ապա այն պետք է լինի e ազատ անդամի բաժանարարը:

Այսինքն, եթե $\alpha \in Z$ և $f(\alpha) = 0$, ապա $e \vdots \alpha$:

Թեորեմ 2. Եթե $f(\alpha) = 0$ և $e \vdots \alpha$, ապա բաժանարարներից փորձարկման են ենթակա միայն նրանք, որոնց դեպքում $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ և $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ կոտորակները միաժամանակ դառնում են ամբողջ թվեր:

Թեորեմ 3: Եթե (1) հավասարումն ունի ռացիոնալ $\frac{P}{q}$ տեսքի արմատներ, ապա $a \vdots P$ և $e \vdots q$:

Այլ կերպ ասած, եթե $f\left(\frac{P}{q}\right) = 0$, ապա $a \vdots P$, $e \vdots q$:

Թեորեմ 4. (1) հավասարման $\frac{P}{q}$ տեսքի ռացիոնալ արմատներից փորձարկման են ենթակա միայն նրանք, որոնց դեպքում $\frac{f(1)}{P-q}$ և $\frac{f(-1)}{P+q}$ կոտորակները ամբողջ թվեր են:

Վիետի բանաձևերը կապ են հաստատում հավասարման գործակիցների և հավասարման արմատների միջև: Դրանք իրավացի են ցանկացած n-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարման, մասնավորապես՝ նաև չորրորդ աստիճանի հավասարումների դեպքում:

Դիցուք $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, իրական կամ կոմպլեքս թվերը (1) հավասարման արմատներն են: Այդ դեպքում իրավացի են հետևյալ հավասարությունները՝

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{b}{a}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{c}{a}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{d}{a}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{e}{d} \end{cases} \tag{2}$$

(2) հավասարությունները կոչվում եմ Վիետի բանաձևեր (1) չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների դեպքում:

Նկատենք, որ Վիետի բանաձևերի կիրառությամբ որոշակի արդյունքներ ստանալու համար անհրաժեշտ է ունենալ հավասարման արմատները միմյանց հետ կապող լրացուցիչ պայմաններ:

Դիտողության կարգով նկատենք, որ եթե (1) ամբողջ գործակիցներով չորրորդ աստիճանի հավասարման ավագ անդամի գործակիցը՝ $a = 1$, այսինքն ունենք վերածված տեսքի (նորմավորված) հավասարում, և այն ունի ռացիոնալ արմատ, ապա այդ արմատը պարտադիր կերպով ամբողջ թիվ կլինի: Եթե կարող ենք գտնել չորրորդ աստիճանի հավասարման համար երկու ամբողջ կամ ռացիոնալ արմատներ, ապա Բեզուի թեորեմի կամ Հորների սխեմայի միջոցով կգտնենք հավասարման $(x - \alpha_1)$, $(x - \alpha_2)$ գծային երկանդամների վրա բաժանումից առաջացած մնացորդ բազմանդամը կամ բազմանդամի գործակիցները, որն արդեն կներկայացնի երկրորդ աստիճանի՝ քառակուսի եռանդամ: Լուծելով ստացված քառակուսի հավասարումը՝ կստանանք (1) հավասարման երրորդ և չորրորդ արմատները:

Մասնավորապես, եթե (1)-ի արմատները կոմպլեքս թվեր են, ապա դրանք կլինեն զույգ առ զույգ միմյանց համալուծ կոմպլեքս թվեր:

Ընդգծենք, որ եթե պահանջվում է պարզապես որոշել (1) հավասարման իրական արմատների քանակը, ապա բավական է, հետազոտելով ածանցյալի միջոցով, կառուցել չորրորդ աստիճանի $f(x)$ բազմանդամի գրաֆիկը (երկրաչափական պատկերը), որից հետո OX առանցքի և գրաֆիկի հատման կետերի քանակով եզրակացնել (1) հավասարման իրական արմատների թիվը:

Դիտարկենք մեկ X փոփոխականի ամբողջ գործակիցներով չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումներ և նկարագրենք դրանց լուծման տարբեր եղանակները:

1. Երկքառակուսի հավասարումներ: Դիցուք ունենք հետևյալ չորրորդ աստիճանի հավասարումը, որից բացակայում են x և x^3 անհայտները պարունակող անդամները.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{3}$$

որտեղ $a, b, c \in z\,, a \neq\ 0$:

Կատարելով $x^2 = t$ տեղադրումը՝ (3) հավասարումը կվերածվի t-ի նկատմամբ քառակուսի հավասարման.

$$at^2 + bt + c = 0: \tag{3′}$$

Կամ պարզապես դիտելով (3)-ը՝ իբրև քառակուսի հավասարում x^2–ու նկատմամբ x-ի արժեքները գտնելու համար արմատ հանենք (3′) հավասարման արմատներից՝

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}: \tag{4}$$

2. Չորրորդ աստիճանի անդրադարձ հավասարումներ: Դիցուք ունենք (1) հանրահաշվական հավասարումը, որի գործակիցների համար բավարարվում է $\frac{a}{e} = (\frac{b}{d})^2$ (*), կամ էլ, մասնավորապես, (1) հավասարման գործակիցները՝ a, b, c, d, e, ընթերցվում են նույն հերթականությամբ՝ թե ձախից աջ և թե աջից ձախ:

Այսպիսի հավասարումներ հաճախ են հանդիպում դպրոցական հանրահաշվի դասընթացում, որոնք կոչվում են չորրորդ աստիճանի անդրադարձ հավասարումներ: Անդրադարձ հավասարումների լուծումը հատուկ տեղադրման միջոցով վերածվում է երեք քառակուսի հավասարումների լուծման: Եթե $x = 0$ -ն լուծում չէ (1)-ի համար, ապա $x^2 \neq 0$: (1)-ի երկու մասն էլ բաժանելով x^2-ու վրա, կատարելով համապատասխան խմբավորումներ, (1) հավասարումը կբերվի իրեն համարժեք հետևյալ տեսքի.

$$(ax^2 + \frac{e}{x^2}) +\ (bx + \frac{d}{x}) + c = 0:$$

Հաշվի առնելով (*) անդրադարձության պայմանը և անջատելով լրիվ քառակուսի՝ համապատասխանաբար կստանաք.

$$e\left((\frac{b}{d}x + \frac{1}{x})^2 - \frac{2b}{d}\right) + d(\frac{b}{d}x + \frac{1}{x}) + c = 0:$$

Կատարելով $t = \frac{b}{d}x + \frac{1}{x}$ տեղադրումը՝ հավասարումը կվերածվի t-ի նկատմամբ քառակուսի հավասարման՝

$$e(t^2 - \frac{2b}{d}) + dt + c = 0:$$

Լուծելով t-ի նկատմամբ քառակուսի հավասարումը՝ կստատանք t_1 և t_2 փոփոխականների իրական կամ կոմպլեքս երկու արժեք, իսկ նշանակման մեջ տեղադրելուց հետո կստանանք x-ի նկատմամբ երկու քառակուսի հավասարումներ, որոնց լուծումների բազմությամբ էլ կորոշվեն անդրադարձ հավասարման չորս արմատները:

3. Ֆերրարիի մեթոդը: Դիցուք այժմ ունենք (1) ընդհանուր տեսքի չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումը: Նշենք այն հիմնական եղանակները, որոնցով կարելի է լուծել այդ հավասարումները: Նախ դիտարկում կատարելով՝ նկատենք, որ հատուկ տեղադրման միջոցով՝ $x = y - \frac{a}{4}$, (1)-ից կարելի է արտաքսել x^3 անհայտը պարունակող երկրորդ անդամը: Առանց ընդհանրության խախտման՝ ընդունենք $a = 1$, այսինքն դիտարկենք վերածված (նորմավորված) չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումը.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0: \quad (5)$$

(5) հավասարման լուծման Ֆերրարիի մեթոդի էությունը հետևյալն է: Ներմուծենք α պարամետրը այնպես, որ (5)-ի ձախ մասը դառնա լրիվ քառակուսի՝

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha)^2 = -bx^2 - cx - d + \frac{a^2}{4}x^2 + \alpha^2 + 2\alpha x^2 + a\alpha x: \quad (6)$$

α պարամետրը ընտրենք այնպես, որ (6) հավասարման աջ մասը դառնա լրիվ քառակուսի: Դրա համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $D = 0$: Վերջինս կներկայացնի α-ի նկատմամբ երրորդ աստիճանի հավասարում՝ իրական գործակիցներով: Այն անպայման ունի գոնե մեկ իրական արմատ, որը որոշելու համար կարելի է օգտվել Կարդանոյի բանաձևերից:

Դիցուք α_0-ն նշված երրորդ աստիճանի հավասարման արմատներից մեկն է: Տեղադրելով այն (6) հավասարման մեջ՝ կստանանք.

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha_0)^2 = (mx + n)^2,$$

որն էլ տրոհվում է երկու քառակուսի հավասարումների.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha_0 = mx + n, \\ x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha_0 = -mx - n \end{array}\right. \quad (7)$$

4. Անորոշ գործակիցների մեթոդը: (5) հավասարման ձախ մասի չորրորդ աստիճանի բազմանդամը ներկայացվում է երկու քառակուսի եռանդամների արտադրյալի տեսքով, անորոշ գործակիցներով.

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + ex + \varphi)(x^2 + gx + h): \quad (8)$$

Բացելով փակագծերը և հավասարեցնելով ձախ և աջ մասերի x անհայտի միևնույն աստիճանի գործակիցները՝ ստացված համակարգից կորոշենք e, φ, g, h անհայտների արժեքները: Տեղադրելով այդ արժեքները (8)-ի մեջ՝ կստանանք 2 քառակուսի հավասարումների համախումբ.

$$\left[\begin{array}{l} x^2+ex+\varphi=0, \\ x^2+gx+h=0: \end{array}\right. \tag{9}$$

Լուծելով վերջին քառակուսի հավասարումները՝ կստանանք սկզբնական հավասարման լուծումների բազմությունը:

5. Հորների սխեման կամ Բեզուի թեորեմի կիրառությունը: Հորների սխեմայի կամ Բեզուի թեորեմի կիրառմամբ սկզբնական (1) հավասարման ռացիոնալ և ամբողջ արմատների որոշմամբ (իհարկե, եթե այդպիսիք կան) չորրորդ աստիճանի հավասարման կարգը իջեցնում ենք երկրորդ աստիճանի: Լուծելով վերջիններս՝ կստանանք սկզբնական հավասարման լուծումների համախումբը:

6. Բազմապատիկ արտադրիչների առանձնացման եղանակը: Եթե $f(\alpha) = 0$, իսկ $f'(\alpha) \neq 0$, ապա $x = \alpha$ իրական թիվը կլինի $f(x)$ բազմանդամի կամ, որ նույնն է, չորրորդ աստիճանի (1) հավասարման պարզ միապատիկ արմատը:

Երբ $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$, բայց $f''(\alpha) \neq 0$, ապա $x = \alpha$ իրական թիվը կլինի $f(x)$ բազմանդամի կրկնապատիկ արմատը: Այսպիսով, $f(x)$ բազմանդամի բազմապատիկ արմատները գտնելու համար անհրաժեշտ է լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ f'(x) = 0: \end{cases} \tag{10}$$

7.Կիրառություններ: Վերոհիշյալ ասվածը կիրառենք հետևյալ չորրորդ աստիճան հավասարման նկատմամբ.

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0: \tag{11}$$

Խմբավորման և լրիվ քառակուսի անջատելու ճաապարհով (11)-ը կբերվի հետևյալ տեսքի.

$$(x^2 + 1)^2 - 4(x + 1)^2 = 0,$$

որն էլ համարժեք է հետևյալ համախմբին.

$$\left[\begin{array}{l} x^2+1=2x+2, \\ x^2+1=-2x-2: \end{array}\right. \tag{12}$$

Անորոշ գործակիցների մեթոդով կլուծվի այսպես՝

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d):$$

Բացելով աջ մասի փակագծերը և հավասարեցնելով ձախ և աջ մասերի x անհայտի միևնույն աստիճանի գործակիցները՝ կստանանք a, b, c, d անորոշ գործակիցների համար հետևյալ համակարգը.

$$\begin{array}{c} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{array}\left\{\begin{array}{c} 1 = 1, \\ 0 = c + a, \\ -2 = ad + bc, \\ -8 = d + ac + b, \\ -8 = ad + bc, \\ -3 = bd: \end{array}\right.$$

Լուծելով համակարգը՝ կստանանք $a = \pm 2$, $b_1 = -1, b_2 = 3$, $d_1 = 3$, $d_2 = -1$, $c_{1.2} = \pm 2$:

Արդյունքում կրկին կհանգենք քառակուսի հավասարումների (9) համախմբին:

Այժմ լուծենք երրորդ եղանակով՝ Ֆերրարիի մեթոդով:

Ներմուծենք α պարամետրը այնպես, որ ձախ մասը դառնա լրիվ քառակուսի.

$$(x^2 + \alpha)^2 = 2x^2 + 8x + 3 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 2(1 + \alpha)x^2 + 8x + 3 + \alpha^2: \qquad (13)$$

α-ն գտնենք այնպես, որ $D = 0$.

$$\frac{D}{4} = 16 - 2(1 + \alpha)(3 + \alpha^2) = 0:$$

Նկատենք, որ $\alpha_0 = 1$-ը վերջին երրորդ աստիճանի հավասարման արմատն է: Տեղադրելով (13)-ի մեջ $\alpha = 1$, կստանանք՝

$$(x^2 + 1)^2 = 4x^2 + 8x + 4 = (2x + 2)^2,$$

որն էլ կրկին կլինի համարժեք (12) համախմբին:

Եզրակացություն: Կարող ենք փաստել, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում չորրորդ աստիճանի հավասարումների ներառումը կխթանի սովորողների որոնողական ունակությունները, կնպաստի տեսական նյութի իմաստավորված յուրացմանը, առարկայի հանդեպ հետաքրքրության աճին, կզարգացնի սովորողների տրամաբանական և ստեղծագործական մտածողությունը, ինչը վերջնարդյունքում կհանգեցնի ուսուցման արդյունավետության և ըստ այդմ՝ կրթության որակի աճին:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Կուրոշ Ա.Գ.** Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց.- Երևան, «Լույս», 1965:
2. **Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա.** Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. 10-րդ դասարան, բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար.- Երևան «Տիգրան Մեծ», 2009:
3. **Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա.** Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. 11-րդ դասարան, բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար.- Երևան, «Տիգրան Մեծ», 2010:
4. **Միքայելյան Հ.Ս.** Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց.- Երևան, «Նաիրի», 2001:
5. **Курош А.Г.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.- М.: Наука, 1983.

Л.А. СЕХПОСЯН. Н.С. АСЛАНЯН

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ. ИССЛЕДОВАНИЕ КРАТНОСТИ КОРНЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрены возможные эффективные применения решений алгебраических уравнений четвертой степени в курсе математики.

Сделана попытка выделить конкретные виды алгебраических уравнений четвертой степени, для которых указаны конкретные способы решения, в результате чего решение алгебраических уравнений четвертой степени приводит к решению квадратных уравнений.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, задача, метод, условие, неопределенность, логика.

L.A. SEKHPOSYAN, N.S. ASLANYAN

DIFFERENT WAYS OF SOLVING EQUATIONS OF THE FOURTH DEGREE. INVESTIGATING THE ROOT PRIMALITY BY THE DERIVATIVE

The work is devoted to the consideration of possible effective applications of solutions of IV grade algebraic equations in mathematics courses.

An attempt is made to distinguish specific types of algebraic equations of the fourth degree, for which specific methods of solution are specified, as a result of which the solution of the algebraic equations of the fourth degree leads to the solution of quadratic equations.

Keywords: algebraic equations, problem, method, condition, uncertainty, logic.