

С.В. ВЕРЛИНСКИЙ, А.Л. ШЕКЯН, Л.А. ШЕКЯН

**ИЗГИБ БАЛКИ НА УПРУГОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОЛОСЕ
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СИЛАМИ
ПРИ НАЛИЧИИ СЖИМАЮЩИХ ОСЕВЫХ СИЛ**

В рамках обобщенной модели изгиба балки С.П. Тимошенко [1], когда на прогибы балки влияют как поперечные, так и действующие на ее срединной линии продольные сжимающие осевые силы, рассматривается плоская контактная задача об изгибе упругой балки, поставленной на верхней горизонтальной границе упругой шероховатой полосы и находящейся под действием заданных равномерно распределенных вертикальных сил и сжимающих осевых сил. Нижняя горизонтальная грань полосы закреплена. Задача сведена к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна [2] с дополнительным условием. Эффективное решение задачи получено по разработанной в [3] методике, основанной на теории Гаммерштейна [2] и принципе сжимающих отображений [4]. Получено приближенное аналитическое решение задачи. Аналогичные контактные задачи об изгибе балки на упругом основании при наличии сжимающих или растягивающих осевых сил рассмотрены в [5,6].

Ключевые слова: изгиб, упругая балка, сжимающие осевые силы, плоская контактная задача.

1. Пусть балка длины $2a$, высоты h , модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν , изгибаясь под действием распределенных вертикальных сил постоянной интенсивности q и осевых горизонтальных сжимающих сил T , вдавливается в упругую бесконечную полосу толщиной h_1 , с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 , нижняя грань которой $y = h_1$ жестко закреплена (см. рис.).

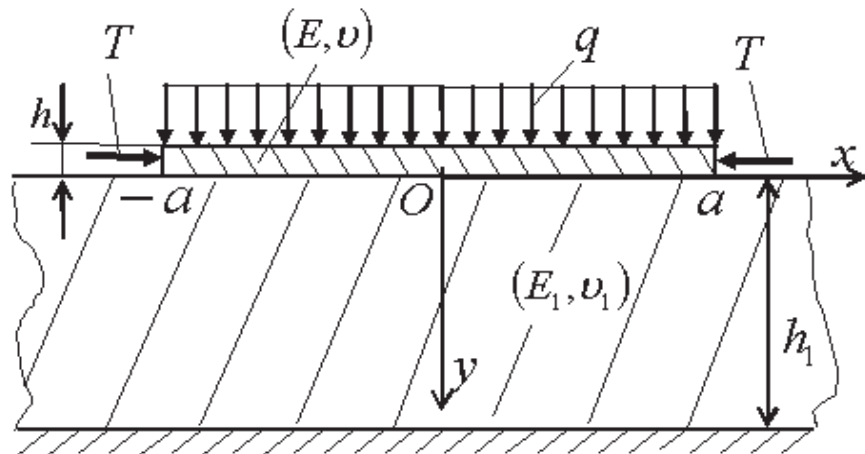


Рис.

Требуется определить законы распределения контактных давлений $p(x)$, действующих между балкой и полосой, вертикальные перемещения $v(x)$ точек изогнутой оси балки, функции изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$ в сечениях балки.

Дифференциальное уравнение изгиба балки поперечными силами q и $p(x)$ с учетом влияния действующих вдоль срединной линии балки сжимающих сил T по теории С.П. Тимошенко ([1], стр.422, формула (217), $T = -N_x$, $w = v$, $N_y = N_{xy} = 0$) имеет вид

$$D \frac{d^4 v}{dx^4} + T \frac{d^2 v}{dx^2} = p(x) - q \quad (-a < x < a), \quad (1)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – жесткость балки на изгиб. При этом функции $v(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ связаны между собой соотношениями

$$M(x) = D \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad Q(x) = D \frac{d^3 v}{dx^3}. \quad (2)$$

Уравнение (1) рассматривается при следующих граничных условиях: $M(\pm a) = 0$, или

$$(d^2 v / dx^2) \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (3)$$

указывающих на то, что в концевых точках балки $x = \pm a$ отсутствуют изгибающие моменты $M(x)$. При этом условия равновесия балки имеют вид

$$\int_{-a}^a [p(x) - q] dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a p(x) dx = 2aq = P, \quad (4)$$

$$\int_{-a}^a x[p(x) - q(x)] dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a xp(x) dx = 0, \quad (5)$$

где P - величина главного вектора заданной распределенной нагрузки q .

Введя обозначения

$$k = \sqrt{T/D}, \quad g(x) = [p(x) - q]/D, \quad y = d^2 v / dx^2, \quad (6)$$

вместо (1) получим относительно функции $y \equiv d^2 v / dx^2$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = g(x), \quad (-a < x < a), \quad (7)$$

решение которого с учетом граничных условий (3) представляется формулой [5]

$$y \equiv \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a (\cos^2 ka \sin kx \sin ks - \sin^2 ka \cos kx \cos ks) g(s) ds + \\ + \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) g(s) ds. \quad (8)$$

Отсюда, учитывая симметричность задачи, получим

$$v(x) = \int_{-a}^a H(x, s) g(s) ds + v_*, \quad (-a \leq x \leq a), \quad (9)$$

где

$$H(x, s) = \int_0^x (x-t) \left[\frac{\cos^2 ka \sin kt \sin ks - \sin^2 ka \cos kt \cos ks}{k \sin 2ka} + \frac{\sin(k|t-s|)}{2k} \right] dt, \quad (10)$$

а v_* – постоянная интегрирования, характеризующая вертикальное перемещение изогнутой оси балки в точке с координатой $x = 0$.

2. Теперь рассмотрим упругое равновесие шероховатой полосы (см. рис.), нижняя $y = h_1$ грань которой жестко защемлена, а на участке $-a \leq x \leq a$ её верхней границы $y = 0$ приложены нормальные контактные давления интенсивности $p(x)$.

Вертикальное упругое перемещение $v_1(x)$, которое получает точка с координатой x участка контакта $[-a; a]$ верхней границы $y = 0$ полосы, согласно [7], представим в виде суммы двух перемещений

$$v_1(x) = v_{\text{шерох}}(x) + v_{\text{глоб}}(x) \quad (-a \leq x \leq a). \quad (11)$$

Перемещения $v_{\text{шерох}}(x)$ обусловлены деформациями верхнего тонкого граничного шероховатого слоя полосы и, согласно экспериментам [7], пропорциональны некоторой степени контактного давления $p(x)$ в данной точке:

$$v_{\text{шерох}}(x) = A \cdot [p(x)]^\beta \quad (-a \leq x \leq a), \quad (12)$$

где A и β - положительные постоянные, характеризующие шероховатость поверхности слоя, определяемые экспериментальным путем, причем $0,3 < \beta \leq 1$.

Перемещения $v_{\text{глоб}}(x)$ возникают вследствие глобальной деформации полосы. Они определяются решением плоской граничной задачи линейной теории упругости для упругой однородной изотропной полосы толщиной h_1 , модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 , когда на участке $-a \leq x \leq a$ её верхней границы $y = 0$ приложены нормальные контактные давления $p(x)$, а нижняя граница $y = h_1$ жестко закреплена [8]:

$$v_{\text{глоб}}(x) = \frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s) ds \quad (-a \leq x \leq a), \quad (13)$$

где ядерная функция $U(z)$ выражается формулой

$$U(z) = \int_0^\infty \frac{(2\varepsilon h 2t - 4t) \cos zt}{\varepsilon(2\varepsilon h 2t + 1 + \varepsilon^2 + 4t^2)} dt \quad (\varepsilon = 3 - 4\nu_1). \quad (14)$$

Далее, запишем условие контакта балки и упругой полосы:

$$v(x) = v_1(x) \quad (-a \leq x \leq a), \quad (15)$$

которое согласно (9), (11)-(13) принимает вид

$$\int_{-a}^a H(x,s)g(s)ds + v_* = A \cdot [p(x)]^\beta + \frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s) ds \quad (-a \leq x \leq a). \quad (16)$$

Учитывая обозначение функции $g(x)$ из (6), соотношение (16) можно трактовать относительно $p(x)$ как нелинейное интегральное уравнение. Так как в (16) входит также неизвестное постоянное v_* , то нетрудно убедиться, что уравнение (16) и условия равновесия (4), (5) образуют замкнутую систему уравнений относительно $p(x)$ и v_* . После определения этих величин соотношениями (2) и (9) можем определить также $v(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$.

3. Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{s}{a}, h_0 = \frac{h_1}{a}, m = \frac{1}{\beta}, v_0 = \frac{v_*}{a}, P_0 = \frac{A^m}{a^{m+1}} P, q_0 = \left(\frac{A}{a}\right)^m q, \quad (17)$$

$$p_0(\xi) = \frac{A}{a} [p(x)]^\beta, f(\xi, P_0) = D^{-1} \int_{-1}^1 H(a\xi, a\eta) q(a\eta) d\eta, \quad (18)$$

$$H_0(\xi, \eta) = \left(\frac{a}{A}\right)^m \cdot D^{-1} H(x, s), U_0(z) = \frac{2(1-v_1)^2}{\pi E_1} \left(\frac{a}{A}\right)^m U\left(\frac{z}{h_0}\right). \quad (19)$$

Тогда уравнение (16) переходит относительно неизвестной функции $p_0(\xi)$ к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [4]:

$$p_0(\xi) = \int_{-1}^1 [H_0(\xi, \eta) - U_0(\xi - \eta)] \cdot [p_0(\eta)]^m d\eta + f(\xi, P_0) + v_0 \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad (20)$$

а условия равновесия (4), (5) преобразуются к виду

$$P_0 = \int_{-1}^1 [p_0(\xi)]^m d\xi. \quad (21)$$

Таким образом, решение поставленной плоской контактной задачи сводится к определению $p_0(\xi)$ и v_0 из системы уравнений (20), (21).

Эффективное решение системы (20), (21) получим согласно разработанной в [3] методике, основанной на теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [2] и принципе сжимающих отображений [4].

Сначала, исходя из структуры уравнений (20), (21), установим зависимости $p_0(\xi)$, P_0 от v_0 , которые, по существу, являются искомыми зависимостями $p_0(\xi)$ и v_0 от P_0 , но сделать это из (20), (21) существенно легче. С этой целью временно считаем, что значение v_0 задано и фиксировано, а P_0 неизвестно. Тогда, вводя вектор $\bar{x} = \{p_0(\xi), P_0\}$ и представляя систему уравнений (20), (21) в операторном виде $\bar{x} = G(\bar{x})$, сведем её решение к определению неподвижной точки этого нелинейного оператора G [6].

Пусть в множестве X , каждый элемент которого является непрерывной на $\xi \in [-1; 1]$ функцией $p_0(\xi)$ в сочетании с произвольным числом P_0 , введена метрика формулой

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \max_{-1 \leq \xi \leq 1} |p_{01}(\xi) - p_{02}(\xi)| + |P_{01} - P_{02}|, \quad (22)$$

где $\bar{x}_i = \{p_{0,i}(\xi), P_{0,i}\}$ ($i=1,2$) – два произвольных элемента из X . Тогда множество X становится полным метрическим пространством [4]. Пусть далее $S(\bar{O}, r)$ – замкнутый шар в пространстве X с центром $\bar{O} = \{0,0\}$ и радиусом r . Способом, предложенным в [3], можно доказать, что существует область изменения характерных параметров задачи, где оператор $\bar{y} = G(\bar{x})$ отображает шар $S(\bar{O}, r)$ в себе и в нем является сжимающим оператором. Тогда для любого начального элемента $\bar{x}_0 \in S(\bar{O}, r)$ с помощью формул

$$\bar{x}_{i+1} = G(\bar{x}_i) \quad (i=0,1,2,\dots) \quad (23)$$

или

$$p_{0,i+1}(\xi) = \int_{-1}^1 [H_0(\xi, \eta) - U_0(\xi - \eta)] \cdot [p_{0,i}(\eta)]^m d\eta + f(\xi, P_{0,i}, M_{0,i}) + v_0 \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad (24)$$

$$P_{0,i+1} = \int_{-1}^1 [p_{0,i}(\xi)]^m d\xi, \quad M_{0,i+1} = \int_{-1}^1 [p_{0,i}(\xi)]^m \xi d\xi \quad (i=0,1,2,\dots) \quad (25)$$

получается последовательность приближенных решений $\{\bar{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$, которая по метрике (22) стремится к некоторому пределу $\bar{x}^*$, являющемуся неподвижной точкой оператора G , т.е. $\bar{x}^* = G(\bar{x}^*)$. Следовательно, $\bar{x}^*$ соответствует единственному решению системы уравнений (20), (21).

Принимая $\bar{x}_0 = \bar{O}$ в качестве нулевого приближения, из формул (24), (25) получим решение системы уравнений (20), (21) в первом приближении:

$$p_{0,1}(\xi) = v_0, \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad P_{0,1} = 0, \quad M_{0,1} = 0. \quad (26)$$

Учитывая (24)-(26), получим решение системы (20), (21) во втором приближении:

$$p_{0,2}(\xi) = (v_0)^m \int_{-1}^1 [H_0(\xi, \eta) - U_0(\xi - \eta)] d\eta + v_0 \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad (27)$$

$$P_{0,2} = 2(v_0)^m. \quad (28)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. -М.: Наука, 1966. - 636 с.
2. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. -М.: ИЛ, 1960.-300 с.
3. Мхитарян С.М., Шемян Л.А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. -1977. -Т. 30, №3. -С. 15 – 32.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. -М.: Наука, 1965. -360с.
5. Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шемян Л.А. О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учетом сдвигающих сил в ее срединной линии// Изв. НАН Армении. Механика. -2014. -Т. 67, №1. - С. 6-21.
6. Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Шемян А.Л., Шемян Л.А. Изгиб двух одинаковых балок на упругой полосе с учётом сжимающих или растягивающих осевых сил // Труды 8-й Межд. конф. "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". -Горис-Степанакерт, 2014. -С. 48-52.
7. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ. -1979. -Т. 43, вып.1. -С. 99 -105.
8. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. -М.: Наука, 1974. -455 с.

Ս.Վ. ՎԵՐԼԻՆՍԿԻ, Ա.Լ. ՇԵՎՅԱՆ, Լ.Ա. ՇԵՎՅԱՆ

ԱՌԱՋԱԿԱՆ ԱՆՀԱՐԹ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ ՀԵԾԱՆԻ ԾՈՌԻՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ ԲԵՌՈՎ՝ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՍԵՂՄՈՂ ՈՒԺԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ս.Պ. Տիմոշենկոյի՝ հեծանի ծոման ընդհանրացված մոդելի շրջանակներում դիտարկվում է անհարթ շերտի տեսքով առաձգական հիմքի վրա դրված վերջավոր երկարությամբ առաձգական հեծանի ծոման կոնտակտային հարթ խնդիրը, երբ լայնական ուժերից բացի հեծանի առանցքային սեղմող ուժերը նույնպես ազդում են հեծանի ճկվածքի վրա: Խնդրի լուծումը հանգեցված է շերտի և հեծանի միջև գործող կոնտակտային անհայտ ճնշման նկատմամբ Համերշտեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման՝ լրացուցիչ պայմանի առկայությամբ: Ստացված է խնդրի մոտավոր վերլուծական լուծումը:

Առանցքային բառեր. ծոման, առաձգական հեծան, սեղմող առանցքային ուժեր, կոնտակտային հարթ խնդիր

S.V. VERLINSKI, A.L. SHEKYAN, L.A. SHEKYAN

BENDING OF THE BEAM ON AN ELASTIC ROUGH STRIP BY UNIFORMLY DISTRIBUTED CROSS FORCES AT COMPRESSING AXIAL FORCES

The plane contact problem on the bending of the beam of finite length on elastic foundation in the form of a rough strip in the plane strain conditions, the generalized model of the bend in the framework of S.P. Timoshenko, where in addition to vertical forces, axial compressive forces also affect the deflection of the beam is considered. The problem is reduced to the solution of a nonlinear integral equation of Hammerstein type with the additional condition. An effective solution to the problem is obtained by the developed methodology based on the theory of Hammerstein and the principle of contracting maps. An approximate analytical solution is obtained.

Keywords: bending, elastic beam, compressing axial forces, plane contact problem.

ՀՏԴ 676.2.017.26

Ա.Ա. ՄԱՐԳԱՐՅԱՆ

ՏՊԱԳՐԱԿԱՆ ԹՂԹԻ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԱՅԻՆ ԱՄՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիտարկված են տպագրական թղթերի ֆիզիկամեխանիկական հատկությունները՝ կախված թղթի միավոր զանգվածից: Առաջադրված է թղթի շերտի ֆիզիկական մոդել, և ցույց է տրված, որ թղթի խզման և պոկման ուժերը ֆունկցիոնալ կապի մեջ են միավոր զանգվածից և թելքերի ուղղությունից:

Առանցքային բառեր. տպագրական թուղթ, ֆիզիկական մոդել, խզման և պոկման ուժեր, լայնական և երկայնական ուղղություններ:

Տպագրական արտադրանքի որակի չափանիշները նշանակալի կերպով բնութագրվում են տպագրողում ընթացող դեֆորմացիոն երևույթներով, որին մասնակցում են այդ գոտում հայտնված բոլոր նյութերը՝ թուղթը, ներկը և տպագլաններն իրենց բարդ և կազմովի մակերևութային շերտերով: Թղթի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը հիմնական ցուցանիշն է, որը ձևավորում է արտադրանքի որակը, և տպագրության տարբեր տեսակների դեպքում այդ վիճակի հետազոտումը խիստ արդիական խնդիր է:

Աշխատանքի նպատակն է ուսումնասիրել տպագրական թղթի ֆիզիկամեխանիկական վիճակի առանձնահատկությունները թղթի լայնական և երկայնական ուղղություններով, որն անհրաժեշտ է տպագրման գոտում թղթի ամրությունը և դեֆորմացիոն հատկությունները պահպանելու համար:

Թղթի ամրության չափումները, որպես կանոն, վերաբերում են համեմատաբար կարճաժամկետ բեռնվածքին, այդ պատճառով էլ թղթի ամրության սահմանը կարելի է դիտարկել որպես հաստատուն մեծություն: