УДК 517.946

Г.С. СУКИАСЯН

ПЕРЕХОД ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ К КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕИЗВЕСТНЫХ НА ПРИМЕРЕ ДВУМЕРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Разработана математическая модель двумерного электромагнитного поля, построена система аксиом (допущений), которые позволяют адекватно перейти от дифференциального уравнения, описывающего это поле, к конечной системе уравнений с конечным числом неизвестных. Показано, что в рамках предложенной математической модели электромагнитный потенциал обязательно является кусочно-линейной функцией. Доказано, что в рамках математической модели для численного решения получающейся системы уравнений оптимальной сеткой является триангуляция Делоне. Результаты проиллюстрированы примером численного решения полевой задачи для электромагнитных систем с магнитореологической жидкостью при помощи инструмента среды FEMM. Показано, что пакет прикладных программ FEMM согласуется с предложенной нами моделью.

Ключевые слова: математическая модель, кусочно-линейная аппроксимация, электромагнитное поле, триангуляция Делоне.

Введение. В настоящей работе неизвестную функцию на плоскости $f(x, y)$ будем условно рассматривать как совокупность неизвестных зачений. Так как количество точек (x, y) на плоскости бесконечно (континуально), то и совокупность эта бесконечна.

Тогда дифференциальное уравнение, которое выполняется для всех точек плоскости, можно рассматривать как бесконечную систему уравнений с бесконечным числом неизвестных. При таком подходе для численного решения дифференциального уравнения необходимо перейти от бесконечной к конечной системе уравнений с конечным числом неизвестных.

Математическая модель физического процесса предполагает не только задание дифференциального уравнения, описывающего этот процесс, но и принятие системы аксиом (допущений), которые позволяют адекватно перейти от дифференциального уравнения к конечной системе уравнений с конечным числом неизвестных.

Отметим, что хотя эти аксиомы не соответствуют реальному физическому процессу в точности, но мы безоговорочно принимаем их, так как они довольно хорошо его приближают.

Целью настоящей работы является развитие общих алгоритмов построения математических моделей с фокусированием на примере математической модели двумерного электромагнитного поля.

Уравнение Максвелла. Постоянное магнитное поле, создаваемое электрическим током, подчиняется классическому уравнению Максвелла (см. [1])

$$rot\frac{1}{\mu}\left(rot\vec{A}\right) = j, \tag{1}$$

где $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ - векторный магнитный потенциал; $j = (j_x, j_y, j_z)$ - вектор плотности тока; μ - величина магнитной проницаемости среды.

Предположим, что перпендикулярно данной бесконечной плоскости R проходит электрический ток. Этот ток порождает электромагнитное поле с векторным магнитным потенциалом $\vec{A}$. Приняв плоскость R в качестве координатной плоскости xOy, получим, что две составляющие векторов $\vec{A}$ и j равны нулю. Подставляя $A_x = A_y = 0$, $j_x = j_y = 0$ в уравнение Максвелла (1), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z\right) = -j_z. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется уравнением Максвелла для двумерного электромагнитного поля. Если рассматриваем неоднородную среду, где переплетаются участки с ферромагнетиками, воздухом, магнитореологической жидкостью, то значения магнитной проницаемости $\mu(x, y)$ в различных точках (x, y) плоскости R сильно разнятся. В этом случае получить точный аналитический вид функции $A_z(x, y)$ практически невозможно. Приходится искать приближенное решение и строить математическую модель.

Для обоснования перехода от дифференциального уравнения (2) к конечной системе уравнений с конечным числом неизвестных нам потребуется система допущений. Эти допущения удобнее сформулировать для физических процессов, требующих минимизации функционалов вида

$$E(A) = \iint_R K(A(x,y))\, dxdy, \tag{3}$$

где K - заданное интегрируемое ядро. Например, описанное выше двумерное электромагнитное поле затрачивает энергию $E(A)$, определяемую по формуле (см. [2])

$$E(A) = \frac{1}{2}\iint_R \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\right)^2 - 2j(x,y)A(x,y)\right] dxdy, \tag{4}$$

где $A(x, y)$ – третья составляющая векторного магнитного потенциала $\boldsymbol{A}$; $j(x, y)$ – плотность тока в точке (x, y) (индексы z опускаем).

Классический закон Максвелла утверждает, что электромагнитное поле распространяется так, чтобы потери энергии были минимальны. Таким образом, приходим к задаче: найти такую функцию $A(x, y)$, которая минимизирует энергию *E(A)*. Заметим, что дифференциальное уравнение (2) получается из функционала (4) применением вариационной формулы Эйлера.

Математическая модель. Нами разработана математическая модель, основанная на минимизации функционала (4) и следующих четырех допущениях, обосновывающих законность перехода к конечной системе уравнений с конечным числом неизвестных:

1) ограниченность;
2) выделение узлов;
3) выделение соседей;
4) дискретизация.

Допущение 1 - ограниченность. Предполагаем, что на бесконечной плоскости *R* существует ограниченная выпуклая область *D*, вне которой поле равно нулю. Это значит, что во всех точках (x, y) плоскости *R* вне области *D* потенциал $A(x, y)$ и плотность тока $j(x, y)$ равны нулю.

Из допущения 1 следует, что в формуле (4) в качестве области интегрирования вместо бесконечной плоскости *R* берется ограниченная выпуклая область *D*.

Из непрерывности потенциала $A(x, y)$ следует, что на границе ∂D области *D* функция $A(x, y)$ принимает нулевое значение. Таким образом, имеем краевую задачу с граничным условием Дирихле:

$$A(x, y)|_{(x,y)\in\partial D} = 0.$$

Допущение 2 - выделение узлов. Предполагаем, что в области *D* выделено конечное множество точек, называемых узлами. Узлы, лежащие на границе ∂D, называются граничными; остальные - внутренними. Все расчеты значений потенциала $A(x, y)$ ведутся только во внутренних узлах $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, где n – количество внутренних узлов. Допущение 2 приводит нас к матрице M_n размером nxn, элементы a_{ij} которой показывают величину взаимодействия узлов P_i и P_j. Эта матрица послужит матрицей для будущей системы уравнений с конечным числом неизвестных.

Отметим, что мы ищем приближенное решение дифференциального уравнения. Точность приближения сильно зависит от числа узлов: чем больше узлов – тем меньше погрешность приближения.

Допущение 3 - выделение соседей. Предполагаем, что все пары узлов (как внутренних, так и граничных) делятся на два типа: соседние и несоседние. Предполагаем, что взаимодействуют только пары соседних узлов. Допущение 3 приводит к тому, что в матрице M_n возникает большое количество нулей: если узлы P_i и P_j не являются соседними, то $a_{ij} = 0$.

Если соединить все пары соседних узлов, то получим плоский граф, называемый аппроксимационной сеткой. Ячейки сетки называют конечными элементами, а сам метод решения при помощи сетки соседних узлов – методом конечных элементов (см. [3]).

Допущение 4 – дискретизация. Хотя все фигурирующие в формуле (4) функции являются непрерывными, мы предполагаем, что магнитная проницаемость среды $\mu(x, y)$ дискретна. Точнее, полагаем, что $\mu(x, y)$ является кусочно-постоянной функцией. Из этого следует, что область D разбивается на конечное число подобластей (элементов), в каждой из которых проницаемость $\mu(x, y)$ постоянна.

Отметим, что в разных элементах значения постоянной μ разные. Заметим также, что из постоянства μ следует и постоянство электромагнитной индукции B. Учтем, что индукция B зависит от производных потенциала $A(x, y)$ первого порядка (см. [2]):

$$B^2 = \left(\frac{\partial A(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\right)^2 .$$

Следовательно, из постоянства B следует линейность потенциала $A(x, y)$, а из кусочного постоянства μ - кусочная линейность потенциала $A(x, y)$. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. В рамках нашей математической модели из допущений 1 - 4 следует, что электромагнитный потенциал $A(x, y)$ обязательно является кусочно-линейной функцией.

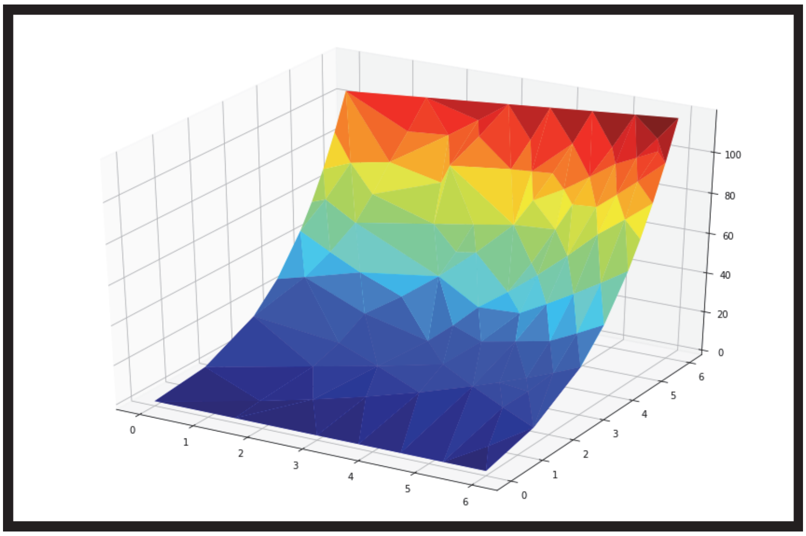

Рис. 1. График типичной кусочно-линейной функции

На рис.1 изображен график типичной двумерной непрерывной кусочно-линейной функции. Проекция этого графика на координатную плоскость *xOy* является плоской сеткой, состоящей из треугольников. Вершины этих треугольников лежат в области *D* из допущения 1 и являются узлами из допущения 2. Два узла являются соседними, если оба принадлежат одному треугольнику сетки.

Утверждение 2. В рамках нашей математической модели из допущений 1 - 4 следует, что аппроксимационная сетка обязательно состоит из треугольников.

Переход к конечной системе. Пусть сетка из треугольников *T* имеет *n* внутренних узлов $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Каждая непрерывная кусочно-линейная функция $A_T(x,y)$, соответствующая триангуляции *T*, однозначно определяется значениями $z_1, z_2, \ldots, z_n$ функции во внутренних узлах $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Поэтому минимизация энергетического функционала *E(A)* сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial E(A(T,z_1,z_2,\ldots,z_n)}{\partial z_k} = 0, k = 1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Заметим, что в системе уравнений (5) неизвестными являются значения $z_k = A_T(P_k)$ искомой функции $A_T(x,y)$ во внутренних узлах P_k, $k=1,2,\ldots,n$ сетки *T*. Число неизвестных *n* равно количеству уравнений и количеству внутренних узлов сетки. Элементы a_{ij} матрицы системы уравнений (5) имеют вид вторых производных:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 E(T,z_1,z_2,\ldots,z_N)}{\partial z_i \, \partial z_j}.$$

При этом, согласно допущению 3, если узлы P_i и P_j не являются соседними, то $a_{ij} = 0$.

Оптимальная сетка. В практических задачах число узлов сетки (а значит и число уравнений), может быть огромным, вплоть до нескольких миллионов. Поэтому приходится решать систему уравнений (5) численно, методом последовательных итераций. Известный принцип доминирования диагонали (см. [4]) утверждает, что чем меньше сумма недиагональных элементов матрицы системы, тем быстрее сходится итерационный процесс. В идеальном случае, когда все недиагональные элементы равны нулю, система решается за одну итерацию. Рассмотрим пару соседних внутренних узлов P_i и P_j. Непосредственным вычислением вторых производных можно получить, что недиагональный элемент a_{ij}, $i \neq j$ матрицы системы уравнений (5) пропорционален $\cot v_{ij}$, где v_{ij} – угол при третьей вершине треугольника сетки, содержащего вершины P_i и P_j, как показано на рис. 2.

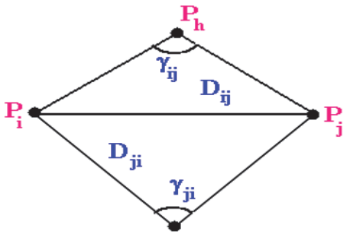

Рис. 2. Угол v_{ij}

Мы используем следующее экстремальное свойство сеток из треугольников (см. [5]).

Теорема 1. Сумма котангенсов внутренних углов всех треугольников сетки как функция от триангуляции с фиксированным набором узлов достигает своего минимума для триангуляции Делоне.

Используя теорему 1 и пропорциональность недиагональных элементов котангенсу, получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. В рамках нашей математической модели из допущений 1 - 4 следует, что для численного решения системы уравнений (5) оптимальной сеткой является триангуляция Делоне.

Пример. Результаты проиллюстрируем примером численного решения полевой задачи для электромагнитной системы с магнитореологической жидкостью (см. [6, 7]). На рис. 3 показаны силовые линии электромагнитного потенциала, полученные при помощи пакета прикладных программ FEMM, и соответствующая сетка.

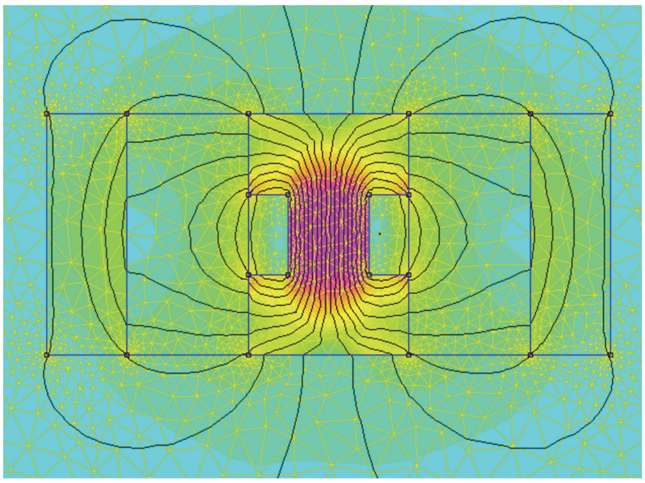

Рис. 3. Кусочно-линейная аппроксимация электромагнитного поля и соответствующая триангуляция Делоне

Из рисунка видно, что потенциал $A(x, y)$ аппроксимирован кусочно-линейной функцией, а сетка является триангуляцией Делоне.

Таким образом, инструмент среды FEMM [8] согласуется с нашей моделью и нашими допущениями.

Выводы. Построена математическая модель двумерного электромагнитного поля на основе уравнения Максвелла и четырех допущений.

Доказано, что в рамках нашей математической модели аппроксимационная сетка обязательно состоит исключительно из треугольников.

Доказано, что в рамках нашей модели оптимальной сеткой является триангуляция Делоне.

Пакет прикладных программ FEMM согласуется с нашей математической моделью и нашими допущениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке и образованию РА, грант №25RG-2B089.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Terzyan H.** Simulation of Electromechanical Systems. Numerical Methods and Solutions, VDM Verlag.-2009.-280p.
2. **Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.** Теоретические основы электротехники.-4-е изд. -СПб.: Питер, 2003.-377 с.
3. **Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E.** Concepts and Applications of Finite Element Analysis.-J. Wiley, New York, 1989.-650p.
4. **Briggs K.** Diagonally Dominant Matrix, MathWorld--A Wolfram Web Resource, created by E.W. Weisstein, https://mathworld.wolfram.com/Diagonally DominantMatrix.html
5. **Sukiasyan H.S.** On Extremal Property of the Sum of Cotangents and its Applications in Mathematical Physics // Lobachevskii Journal of Mathematics.- 2019.- Vol. 40 (8).- P. 1137—1140.
6. **Մելքոնյան Տ.Ռ.** Մագնիսառեոլոգիական հեղուկով համակարգի մագնիսական դաշտի մոդելավորումը FEMM միջավայրում //ՀՃԱ Լրաբեր.-2023.- Հատոր 20, № 1.-էջ 34-40.
7. **Сукиасян Г.С., Мелконян Т.Р., Григорян А.Х.** Автоматизированное моделирование электромагнитного поля для зернистых сред //Вестник НПУА. Информационные технологии, электроника, радиотехника.-2020.-2.-С.26-33.
8. **de Berg M., Cheong O., van Kreveld M., Overmars M.** Computational Geometry: Algorithms and Applications.-Springer, Berlin, 2008.- 388p.

Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԻՑ ԱՆՑՈՒՄ ԴԵՊԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԹՎՈՎ ԱՆՀԱՅՏՆԵՐՈՎ ԵՐԿՉԱՓ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ՕՐԻՆԱԿՈՎ

Մշակվել է երկչափ էլեկտրամագնիսական դաշտի մաթեմատիկական մոդել, կառուցվել է աքսիոմների (ենթադրությունների) համակարգ, որը թույլ է տալիս ադեկվատ կերպով անցնել դիֆերենցիալ հավասարումից վերջավոր թվով անհայտներով հավասարումների համակարգին: Ցույց է տրվել, որ առաջարկված մաթեմատիկական մոդելի շրջանակներում էլեկտրամագնիսական պոտենցիալը պարտադիր կտոր-գծային ֆունկցիա է: Ապացուցվել է, որ մաթեմատիկական մոդելի շրջանակներում ստացված հավասարումների համակարգի թվային լուծման օպտիմալ ցանցը Դելոնեի եռանկյունապատումն է: Արդյունքները պատկերված են FEMM միջավայրի գործիքի միջոցով մագնիսառեոլոգիական հեղուկով դաշտային խնդրի թվային լուծման օրինակով: Ցույց է տրվել, որ FEMM ծրագրային փաթեթը համապատասխանում է մեր կողմից առաջարկված մոդելին:

Առանցքային բառեր. մաթեմատիկական մոդել, կտոր-գծային մոտարկում, էլեկտրամագնիսական դաշտ, Դելոնեի եռանկյունապատում:

H.S. SUKIASYAN

TRANSITION FROM A DIFFERENTIAL EQUATION TO FINITE SYSTEM OF EQUATIONS WITH A FINITE NUMBER OF UNKNOWNS USING THE EXAMPLE OF TWO-DIMENSIONAL ELECTROMAGNETIC FIELD

The purpose of this work is to develop a mathematical model of a two-dimensional electromagnetic field, i.e. to construct a system of axioms (assumptions) that allow an adequate transition from a differential equation to a finite system of equations with a finite number of unknowns. It is shown that within the framework of our mathematical model, the electromagnetic potential is necessarily a piecewise linear function. It is proved that within the framework of our mathematical model, the optimal grid for the numerical solution of the resulting system of equations is the Delaunay triangulation. The results are illustrated by an example of a numerical solution of a field problem for electromagnetic systems with magnetorheological fluid using the FEMM environment tool. It is shown that the FEMM application package corresponds to our model.It is shown that within our mathematical model, from Assumptions 1 - 4 it follows that the electromagnetic potential is necessarily a piecewise linear function.

Keywords**:** mathematical model, piecewise linear approximation, electromagnetic field, Delaunay triangulation.