

Ա.Մ. ՏԵԴՐԱԿՅԱՆ, Ա.Փ. ՓԱՐՏԱՄՅԱՆ, Ա.Ն. ՏԱՐԳՏՅԱՆ
ЗАДАЧА ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ, РЕШЕНИЕ КОТОРОЙ
СВОДИТСЯ К ИДЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Показано, что с высоты H по отношению к горизонту материальная точка, направленная на ускорение сложного движения со скоростью V_0 , представляет собой сумму двух независимых движений, а решение задачи в отдельных участках (вертикально и горизонтально) сводится к идее производной функции.

Ключевые слова: сложное движение материальной точки, свободное падение, производная, дифференциал, мгновенная скорость, средняя скорость.

A.M. SEDRAKYAN, A.F. PARSAMYAN, A.N. SARGSYAN
AN APPLIED PHYSICS PROBLEM, THE SOLUTION OF WHICH IS
RELATED TO THE IDEA OF CONNECTION

It was shown that the movement of a body falling vertically and horizontally from a height H , which is a sum of two independent movements, the solution of the problem is brought to the idea of the derivative of the function.

Keywords: complex motion of a material point, free fall, derivative, differential, instantaneous velocity, average velocity.

ՀՏԴ 53.001.86:373

Լ.Ն. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Ն.Գ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ
ԻՐԱԿԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԱՆԿՅԱՆ ՏԱԿ ՆԵՏՎԱԾ ՄԱՐՄՆԻ ՇԱՐԺՄԱՆ
ՆԿԱՐԱԳՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐԻ ՄԱՍԻՆ
(Կապան)

Ուսումնասիրվել է իրական պայմաններում՝ հորիզոնի նկատմամբ անկյան տակ նետած մարմնի շարժումը: Վերլուծվել են շարժման տեսական երկու դեպքեր:

Կատարվել է թվային հետազոտություն համեմատաբար պարզ դեպքում, երբ դիմադրության ուժը համեմատական է արագության առաջին աստիճանին, որի սահմաններում ընդունելի մոտավորությամբ ներկայացված է խնդրի պարզ մաթեմատիկական լուծումը:

Առանցքային բառեր. իրական պայմաններ, անալիտիկ հետազոտություն, օդի դիմադրության ուժ, թռիչքի հեռավորություն, թվային հետազոտություն:

Ներածություն. Շատ հաճախ հարկ է լինում ուսումնասիրել մարմնի շարժումը, որը սկզբնական արագությունն ստացել է ոչ թե ծանրության ուժին

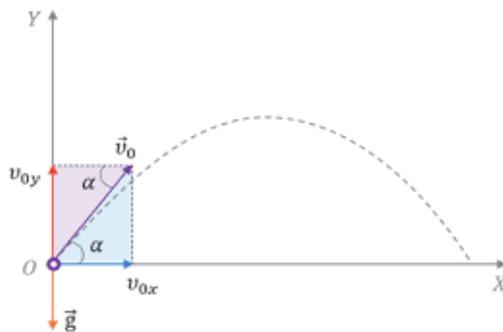
զուգահեռ, այլ այդ ուժի կամ հորիզոնի նկատմամբ որոշակի անկյան տակ: Այդպիսի մարմնի մասին ասվում է, որ այն նետված է հորիզոնի նկատմամբ անկյան տակ:

Հորիզոնի նկատմամբ անկյան տակ նետված մարմնի շարժման ուսումնասիրությունը ներկայացված է ավագ դպրոցի դասընթացում ([1, էջ 74-76]) և մի շարք ձեռնարկներում ([2, էջ 61-74] և այլն): Սակայն դասագրքերում և ձեռնարկներում, գրեթե առանց բացատրության, դիտարկվում է իդեալականացված դեպքը, որի ժամանակ անտեսվում է օդի դիմադրությունը:

Իրական պայմաններում հորիզոնի նկատմամբ անկյան տակ նետված շարժման ուսումնասիրությունը ներկայացնում է մեծ հետաքրքրություն (հատկապես ֆիզիկայի նկատմամբ հակում ցուցաբերող սովորողների շրջանում): Սակայն այս թեման գրեթե արձարծված չէ դասագրքերում և ձեռնարկներում, ուստի հարկ ենք համարում սույն հոդվածում անդրադառնալ դրան:

Այս դեպքում, նախ և առաջ, կարևոր է պարզել՝ ինչպե՞ս կփոխվի մարմնի հետագիծը, երբ հաշվի է առնվում օդի դիմադրությունը. արդյո՞ք թռիչքի հեռահասությունը կլինի հորիզոնի նկատմամբ 45° -ի անկյան տակ սկզբնական նետման դեպքում և այլն:

Անալիտիկ հետազոտություն. Ներածենք կորոդինատների ուղղանկյուն համակարգը, ինչպես ցույց է տրված նկ. 1-ում:



Նկ. 1. Անկյան տակ նետված մարմնի շարժման պարկերը ուղղանկյուն կորոդինատական համակարգում

Ժամանակի սկզբնական պահին m զանգվածով մարմինը գտնվում է կորոդինատների սկզբնակետում: Ազատ անկման g արագացումը ուղղված է ուղղահայաց դեպի ներքև և ունի $(0, -g)$ կորոդինատներ: \vec{v}_0 -ն սկզբնական արագության վեկտորն է: Այդ վեկտորը ներկայացնենք X - առանցքով ուղղված \vec{i} և Y - առանցքով ուղղված \vec{j} բազիսային (միավոր) վեկտորներով.

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} : \quad (1)$$

Այստեղ, ինչպես երևում է նկ. 1-ից, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, որտեղ $v_0 = |\vec{v}_0|$ -ն արագության վեկտորի մոդուլն է, α -ն՝ նետման անկյունը:

Գրենք Նյուտոնի երկրորդ օրենքը.

$$m\vec{a} = \vec{F} : \quad (2)$$

Արագացումը յուրաքանչյուր պահին ներկայացնում է արագության (ակնթարթային արագության) փոփոխման արագությունը, այն է՝ արագության ածանցյալն ըստ ժամանակի.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} : \quad (3)$$

Հետևաբար, Նյուտոնի 2-րդ օրենքը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} , \quad (4)$$

որտեղ \vec{F} -ը մարմնի վրա ազդող բոլոր ուժերի համազորն է:

Իրական շարժման դեպքում մարմնի վրա ազդում են ծանրության $m\vec{g}$ ուժը և օդի դիմադրության \vec{F} ուժը, ուստի կարող ենք գրել.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F} : \quad (5)$$

Դիտարկենք երկու դեպք.

1) Օդի դիմադրության ուժն ուղղված է արագության վեկտորին հակառակ, և նրա մեծությունը համեմատական է արագությանը (համեմատաբար փոքր արագությունների դեպքում). $\vec{F}_d = -k\vec{v}$ ($k > 0$ -ն համեմատականության գործակիցն է):

2) Օդի դիմադրության ուժն ուղղված է արագության վեկտորին հակառակ ուղղությամբ, և նրա մեծությունը համեմատական է արագության քառակուսուն (համեմատաբար մեծ արագությունների դեպքում). $\vec{F} = -\beta|\vec{v}|\vec{v}$ ($\beta > 0$ -ն համեմատականության գործակիցն է):

Առաջին դեպք, երբ դիմադրության ուժը՝ $\vec{F} = -k\vec{v}$, $k > 0$: Այս դեպքում Նյուտոնի երկրորդ օրենքը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v} \text{ կամ } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v} : \quad (6)$$

Ստացված հավասարումը գրենք սկալյար տեսքով.

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m}v_y : \end{cases} \quad (7)$$

Ստացանք երկու գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ: Առաջին հավասարման լուծումն ունի

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{k}{m}t} \quad (8)$$

տեսքը, որում կարելի է համոզվել այն (7)-ի առաջին հավասարման մեջ տեղադրելով և հաշվի առնելով այն, որ ժամանակի սկզբնական՝ $t = 0$ պահին $v_x(0) = v_{0x}$:

Տեղադրմամբ և $v_y(0) = v_{0y}$ պայմանի հաշվառմամբ կարելի է համոզվել, որ (7)-ի երկրորդ հավասարումն ունի հետևյալ լուծումը.

$$v_y(t) = v_{0y} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{gm}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) : \quad (9)$$

(8) և (9) արտահայտություններից հետևում է, որ՝

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x(t) = 0 \text{ և } \lim_{t \rightarrow \infty} v_y(t) = -\frac{gm}{k} : \quad (10)$$

(10) պայմանները վկայում են, որ օդի դիմադրության առկայությամբ մարմինը ձգտում է հավասարաչափ շարժման՝ ի տարբերություն օդի բացակայության հայտնի դեպքի, երբ արագությունն անսահման աճում է:

Օրինակ, օդի դիմադրության պայմաններում պարաշյուտիստը սկզբում շարժվում է արագացմամբ, իսկ այնուհետև սկսում է շարժվել հավասարաչափ (նույնիսկ մինչև պարաշյուտի բացվելը):

Այժմ գտնենք մարմնի x և y կոորդինատների ժամանակային կախումները: Նշված կոորդինատները, համապատասխանաբար, որոշվում են արագութ-

յան v_x և v_y պրոյեկցիաների ժամանակային կախման ֆունկցիաների ինտեգրմամբ.

$$x(t) = \int_0^t v_x(\tau) d\tau, \quad y(t) = \int_0^t v_y(\tau) d\tau: \quad (11)$$

Ժամանակի սկզբնական պահի՝ $x(0) = 0$ և $y(0) = 0$ պայմանների հաշվառմամբ մարմնի x և y կոորդինատների համար կստանանք.

$$\begin{cases} x = v_{0x} \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \\ y = \frac{m}{k} \left[\left(v_{0y} + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - gt \right]: \end{cases} \quad (12)$$

Այժմ դիտարկենք երկրորդ դեպքը, երբ $F = -\beta|\vec{v}|\vec{v}$, $\beta > 0$ -ն՝ դիմադրության գործակիցն է: Այս դեպքում Նյուտոնի երկրորդ օրենքն ունի հետևյալ տեսքը.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \beta|\vec{v}|\vec{v} \quad (13)$$

կամ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{\beta}{m}|\vec{v}|\vec{v}: \quad (14)$$

Ստացված հավասարումը գրենք սկալյար տեսքով.

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y: \end{cases} \quad (15)$$

(15)-ը ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ է: Այն չի հաջողվում լուծել բացահայտ տեսքով, որի պատճառով անհրաժեշտ է կիրառել թվային մոդելավորում:

Թվային հետազոտություն. Նախորդ բաժնում տեսանք, որ առաջին դեպքում մարմնի շարժման հավասարումը կարելի է ստանալ բացահայտ տեսքով: Սակայն երկրորդ դեպքում խնդիրն անհրաժեշտ է լուծել թվայնորեն: Թվային

մեթոդով ընդամենը կստանանք մոտավոր լուծում, սակայն միանգամայն կբավարարի նաև ոչ մեծ ճշգրտությունը:

(π թիվը կամ $\sqrt{2}$ -ը, համենայն դեպս, հնարավոր չէ գրել բացարձակ ճիշտ, այդ իսկ պատճառով հաշվարկներում վերցնում են թվանշանների ինչ-որ վերջավոր թիվ, և դա միանգամայն բավարար է):

Թվային հետազոտությունը դիտարկենք համեմատաբար պարզ առաջին դեպքում, երբ օդի դիմադրության ուժը որոշվում է $\vec{F} = -k\vec{v}$, $k > 0$ բանաձևով: Նշենք, որ $k = 0$ դեպքում ստանում ենք առաջին դեպքը: $\vec{v} = \{v_x, v_y\}$ արագությունը ենթարկվում է (7)-ում գրված հավասարումներին: Այդ հավասարումների ձախ մասերում գրված են արագացման բաղադրիչները՝

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}: \quad (16)$$

Հիշենք, որ արագացումը արագության փոփոխման ակնթարթային արագությունն է, այսինքն՝ արագության ածանցյալն ըստ ժամանակի:

(7) հավասարումների աջ մասերում գրված են արագության բաղադրիչները: Այսպիսով, տրված հավասարումները ցույց են տալիս, թե ինչպես է արագության փոփոխման արագությունը կապված արագության հետ:

Փորձենք գտնել (16) հավասարումների լուծումները թվային մեթոդներով: Դրա համար ժամանակային առանցքի վրա ներմուծենք *ցանց*. ընտրենք Δt թիվը և դիտարկենք ժամանակի $j\Delta t$ տեսքի պահերը՝ $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$, (այստեղ j -ն բնական թվերի ընթացիկ ինդեքսն է).



Մեր խնդիրն է մոտավորապես հաշվել $v_x(t)$, $v_y(t)$ արժեքները ցանցի հանգույցներում: (16) հավասարումներում արագացումը (արագության փոփոխման *ակնթարթային արագությունը*) փոխարինենք արագության փոփոխման *միջին արագությամբ*, դիտարկելով մարմնի շարժումը Δt ժամանակահատվածում.

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \approx \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \approx \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} \end{cases}: \quad (17)$$

Ստացված մոտարկումները տեղադրելով (7) հավասարումներում՝ կստանանք.

$$\begin{cases} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = -\frac{k}{m}v_x(t) \\ \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} = -g - \frac{k}{m}v_y(t), \end{cases} \quad (18)$$

որտեղից՝

$$\begin{cases} v_x(t+\Delta t) = v_x(t) - \frac{k}{m}v_x(t)\Delta t \\ v_y(t+\Delta t) = v_y(t) - \left(g + \frac{k}{m}v_y(t)\right)\Delta t: \end{cases} \quad (19)$$

Ստացված հավասարումները թույլ են տալիս հաշվել $v_x(t)$, $v_y(t)$ ֆունկցիաների արժեքները ցանցի յուրաքանչյուր հաջորդ հանգույցում, եթե հայտնի են այդ ֆունկցիաների արժեքները նախորդ հանգույցում:

Նկարագրված մեթոդով կարող ենք ստանալ արագության բաղադրիչների մոտավոր արժեքների աղյուսակը:

Ճիշտ նույն ձևով կարող ենք գտնել $x(t)$, $y(t)$ մոտավոր արժեքների աղյուսակը, այսինքն՝ մարմնի շարժման հավասարումը:

Ունենք՝

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dy}{dt} = v_y: \end{cases} \quad (20)$$

Ակնթարթային արագությունը փոխարինելով Δt ժամանակահատվածի միջին արագությամբ՝ կստանանք.

$$\begin{cases} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx v_x \\ \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx v_y: \end{cases} \quad (21)$$

(Եշենք, որ գրված հավասարումների աջ մասերում կարելի է վերցնել v_x -ի (v_y -ի) արժեքների կիսագումարը Δt , $t + \Delta t$ կետերում: Հնարավոր է՝ այդ կետերում ճշտությունը լինի ավելի մեծ):

(21)-ից ստանում ենք.

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) - x(t) = v_x(t) \Delta t \\ y(t + \Delta t) - y(t) = v_y(t) \Delta t \end{cases} \quad (22)$$

Այս բանաձևերով կարող ենք հաշվել $x(t)$ և $y(t)$ ֆունկցիաների մոտավոր արժեքների աղյուսակը ցանցի հանգույցներում:

Այժմ փորձենք ներկայացնել այն ճանապարհը, որով հնարավոր է համեմատաբար պարզ եղանակով իրականացնել ստացված ալգորիթմը:

Ներածենք հետևյալ զանգվածները.

v x, vy: array[0..MAX_N] of extended;

x, y: array[0..MAX_N] of extended;

Հանգունորեն այլ զանգվածների համար vx[j] արժեքը հավասարվում է $v_x(j\Delta t)$ ֆունկցիայի արժեքին: Այժմ մնում է գրել շրջապտույտը (ցիկլ), որի ներսում կարելի է հաշվել vx[j+1]-ը՝ արդեն հաշվված vx[j] արժեքի միջոցով, և մնացած զանգվածների դեպքում նույնպես կկատարվի նույն հաշվարկը: Շրջապտույտը կլինի ըստ j -ի 1-ից մինչ N : Այստեղ պետք է սկզբնարժեքավորել vx[0], vy[0], x[0], y[0]-ն՝ ըստ $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ բանաձևերի:

Պասկալ և Սի լեզուներում սինուսի և կոսինուսի հաշվման համար կան $\sin x$ և $\cos x$ ֆունկցիաները, որոնց արգումենտները վերցվում են ռադիաններով:

Մեզ անհրաժեշտ է կառուցել մարմնի շարժման գրաֆիկը $k = 0$ և $k > 0$ դեպքերում ու համեմատել ստացված գրաֆիկները: Գրաֆիկները կարելի է կառուցել *Excel*-ով:

Հաշվարկային բանաձևերը շատ պարզ են, ուստի հաշվարկների համար կարելի է օգտագործել միայն *Excel*-ը և նույնիսկ չօգտագործել ծրագրավորման լեզուն:

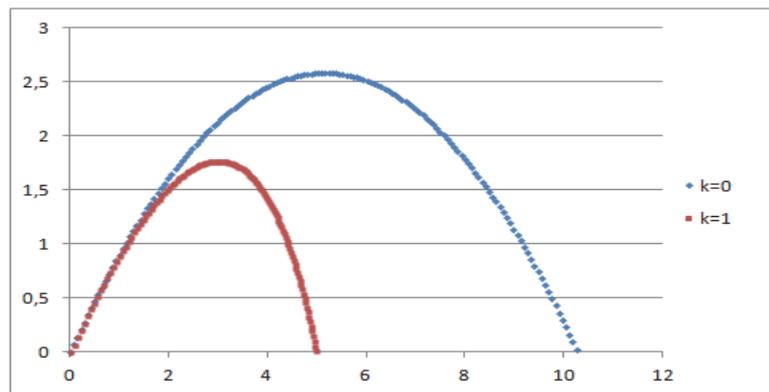
Սակայն հետագայում հարկ կլինի խնդիրը լուծել *CATS*-ով, որտեղ պետք է հաշվել մարմնի թռիչքի ժամանակը և հեռավորությունը, որը հնարավոր չէ շրջանցել առանց ծրագրավորման լեզվի:

Ուշադրություն դարձնենք, որ այստեղ կարելի է թեստավորել ծրագիրը և ստուգել ստացված գրաֆիկները, համեմատելով $k = 0$ դեպքում հաշվարկների

արդյունքները առաջին՝ «Անալիտիկ հեղազոտություն» բաժնում բերված ճշգրիտ բանաձևերով ստացված արդյունքների հետ:

Կարելի է փորձարարություն անել գրված ծրագրի առումով և համոզվել, որ օդի դիմադրության բացակայության ($k = 0$) դեպքում թռիչքի առավելագույն հեռավորությունը, ամրագրված արագության պայմանում, հասնում է $\alpha = 45^\circ$ անկյան դեպքում: Կարելի է պատասխանել հարցին, թե ո՞ր անկյան դեպքում է թռիչքի հեռավորությունը հասնում առավելագույնի օդի դիմադրությունը հաշվառելիս:

Նկ. 2-ում որպես օրինակ ներկայացված են թվային մոդելավորմամբ ստացված մարմնի շարժման հետագծերը $k = 0$ և $k = 1$ դեպքերում, երբ $v_0 = 10$ մ/վ, $\alpha = 45^\circ$, $g = 9,8$ մ/վ², $m = 1$ կգ: Մոդելավորումն իրականացվել է $\Delta t = 0,01$ դեպքում:



Նկ. 2. Անկյան փակ ներված մարմնի շարժման հետագիծը դիմադրության բացակայության ($k=0$) և դիմադրության առկայության դեպքում, երբ $k=1$

Եզրակացություն. Այսպիսով, վերը բերված դիտարկումները ֆիզիկայով առավել հետաքրքրվող աշակերտներին հնարավորություն են տալիս՝ ծանոթանալու գործնականում լայնորեն օգտագործվող մաթեմատիկական և թվային մոդելավորման մեթոդներին, որոնք համեմատաբար քիչ են օգտագործվում դպրոցում:

Նշենք, որ սվյալ մեթոդներն անցած դարի կեսերին օգտագործվել են ԽՍՀՄ-ում ատոմային և սիեզերական նախագծերն իրականացնելիս:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Ֆիզիկա-10: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք ընդհանուր և բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի համար /Է. Ղազարյան, Ա. Կիրակոսյան, Գ. Մելիքյան և ուրիշ. - Եր. : Էդիթ Պրինտ, 2010. - 272 էջ:

2. **Бутиков Е.И., Кондратьев А.С.** Физика: Учеб. пособие: В 3 кн. Кн. 1: Механика. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 352 с.

Л.Н. ПЕТРОСЯН, Н.Г. МОВСИСЯН

**О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА,
БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ, В РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ**

Исследовано движение тела, брошенного под углом к горизонту, в реальных условиях. Дан теоретический анализ движения для двух случаев.

Проведено численное исследование для сравнительно простого случая, когда сила сопротивления пропорциональна скорости первой степени, в пределах которой с принятой степенью вероятности представлено простое математическое решение задачи для этого случая.

Ключевые слова: реальные условия, аналитическое исследование, сила сопротивления воздуха, дальность полета, численное исследование.

L.N. PETROSYAN, N.G. MOVSISYAN

**SOME ISSUES OF DESCRIBING THE MOVEMENT OF A BODY
THROWN AT AN ANGLE IN REAL CONDITIONS**

The article is devoted to the study of the movement of a body thrown at an angle to the horizon in real conditions. A theoretical analysis of the movement is presented for two cases.

A numerical study is carried out for a relatively simple case when the resistance force is proportional to the speed of the first degree, within which a simple mathematical solution of the task for this case is presented with the accepted degree of probability.

Keywords: real condition, analytical study, air resistance force, flight range, numerical study.