

Լ.2. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՀԱՐԹ ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԿՈՄՊԱԿՏԸ ՊԱՐՓԱԿՈՂ ՈՒՂԱՆԿՅԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ուսումնասիրվում են կամայական հարթ ուռուցիկ կոմպակտը պարփակող ուղղանկյան որոնման ալգորիթի իրականացման մանրամասները: Քննարկվում է կոմպակտի մակերեսի և պարփակող ուղղանկյան մակերեսի առնչությունը:

Առանցքային բառեր. ուռուցիկ կոմպակտ, իզոպերիմետրիկ տիպի անհավասարություն:

Դիցուք M –ը հարթության որևէ սահմանափակ ենթաբազմություն է: Փաթեթավորման, ձևման, բախումներից խուսափելու և բազմաթիվ այլ գործնական խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ է լինում քննարկել հետևյալ հաշվողական երկրաչափությանը վերաբերող հարցադրումը՝ գտնել այն ամենափոքր մակերեսով ուղղանկյունը, որը պարունակում է տվյալ բազմությունը: Ակնհայտ է, որ առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է համարել, որ M բազմությունը ուռուցիկ, ինչպես նաև փակ և սահմանափակ է, այսինքն՝ այն կոմպակտ է: Այս ձևակերպմամբ այն հայտնի է որպես կոմպակտը պարփակող ուղղանկյան խնդիր: Հիմնական [1] աշխատանքը, որին հղում են կատարում ավելի քան հազար հետազոտողներ, չնայած իր հավակնոտ անվանմանը, քննարկում է միայն ուռուցիկ P բազմանկյան դեպքը: Հիմնական արդյունքը այն է, որ պարփակող ուղղանկյան գոնե մեկ կողմը պետք է պարունակի P բազմանկյան մեկ կողմը: Հետագա [2] հոդվածում հեղինակները կարծես թե ճշգրտում են Ֆրիմանի և Շապիրայի ալգորիթները, սակայն ստորև բերվող օրինակը հերքում է նրանց արդյունքը:

Տանք ուռուցիկ պատկերներ երկրաչափության որոշ հիմնական հասկացությունների սահմանումները:

M բազմության տրամագիծ կոչվում է նետկալ մեծությունը

$$d(M) = \sup_{x, y \in M} \|x - y\|:$$

Քննարկվող խնդիրների շրջանակում այն կոչվում է նաև M պատկերի բարձրություն:

Դիցուք I –ը որևէ ուղիղ է: Նշանակենք M_I –ով M բազմության պրոյեկցիան I ուղղի վրա: Ակնհայտ է, որ այն կլինի ինչ-որ $[a_i; b_i]$ հատված: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ հատվածներից մեծագույնի երկարությունն էլ հավասար է բազմության տրամագծին:

M բազմության լայնություն կոչվում է նշված հատվածներից ամենափոքրի երկարությունը՝

$$w(M) = \inf_l (b_l - a_l):$$

I ուղիղը կոչվում է M բազմության հենման ուղիղ, եթե $M \cap I \neq \emptyset$ և M -ը գտնվում է I ուղղով որոշվող կիսահարթություններից մեկում: Հիմնական արդյունքներից մեկի համաձայն՝ ուռուցիկ բազմության ամեն մի եզրային կետով անցնում է ամենաքիչը մեկ հենման ուղիղ: Պարզվում է, որ ուռուցիկ բազմության տրամագիծը հավասար է զուգահեռ հենման ուղիղների մեծագույն հեռավորությանը, իսկ լայնությունը՝ այդ ուղիղների նվազագույն հեռավորությանը: Ընդ որում, տրամագծորեն հակադիր կետերը միացնող հատվածը ուղղահայաց է այդ կետերով անցնող հենման ուղիղներից մեկին: Նման պնդումը ճշմարիտ է նաև լայնությունը որոշող կետերը միացնող հատվածի վերաբերյալ: Այս արդյունքները կարելի գտնել հետևյալ աղբյուրում [3]:

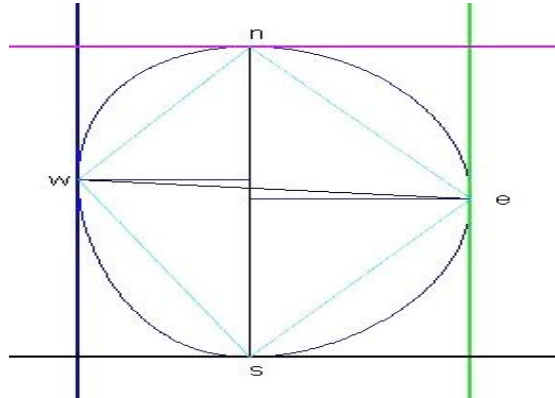
Օրինակ: Դիցուք M -ը եռանկյուն է: Ակնհայտ է, որ եռանկյան տրամագիծը նրա մեծ կողմի երկարությունն է, իսկ լայնությունը՝ այդ կողմի վրա իջեցված բարձրության երկարությունը: Եթե եռանկյունը սուրանկյուն է, ապա այն պարփակող ուղղանկյան մեկ կողմը համընկնում է եռանկյան որևէ կողմի հետ, իսկ մյուս կողմը զուգահեռ է եռանկյան այդ կողմի վրա իջեցված բարձրությանը: Այս դեպքում պարփակող ուղղանկյունները երեքն են: Եթե եռանկյունը բութանկյուն է, ապա պարփակող ուղղանկյան կողմը համընկնում է մեծ կողմի հետ: Այս դեպքում պարփակող ուղղանկյունը միակն է, և նրա կողմերը համընկնում են եռանկյան տրամագիծը և լայնությունը որոշող հատվածների հետ: Ուղղանկյուն եռանկյան համար պարփակող ուղղանկյունները երկուսն են՝ դրանցից մեկի կողմերը համընկնում են եռանկյան էջերի հետ, իսկ մյուսի կողմերից մեկը համընկնում է եռանկյան ներքնաձիգի հետ: Նշենք, որ բոլոր այս դեպքերում պարփակող ուղղանկյան մակերեսը հավասար է եռանկյան մակերեսի կրկնապատիկին:

Հետաքրքիր է պարզել, թե ինչ առնչություն կա պատկերի և այն պարփակող ուղղանկյան մակերեսների միջև: Ակնհայտ է, որ ուղղանկյան համար այդ երկու մեծությունները հավասար են: Կամայական ուռուցիկ պատկերի համար տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ: Կամայական M ուռուցիկ կոմպակտի և այն պարփակող R ուղղանկյան մակերեսների համար՝

$$S(M) \leq S(R) \leq 2S(M).$$

Ապացույց: Պատենք M -ը որևէ կետի շուրջ (եթե նախապես ներմուծենք կորորդինատային համակարգ, ապա կարելի է պտտել համակարգի սկզբնակետի շուրջ) այնքան, որ նրա լայնությունը որոշող հատվածը դառնա ուղղաձիգ (նկ.1):



Նկ. 1

Այս դեպքում այդ հատվածի ծայրակետերով անցնող հենման ուղիղներից մեկ զույգը կլինի հորիզոնական: Նշանակենք լայնությունը որոշող հատվածի վերին ծայրակետը n -ով, իսկ ստորին ծայրակետը՝ s -ով: ns հատվածից ձախ գտնվող՝ M բազմությանը պատկանող ամենահեռու կետը նշանակենք w -ով, իսկ ns հատվածից աջ գտնվող ամենահեռու կետը՝ e -ով: Ակնհայտ է, որ $wnes$ քառանկյունը գտնվում է M պատկերի ներսում, ուստի $S(wnes) \leq S(M)$: Տանենք երկու ուղղաձիգ ուղիղներ w և e կետերով: Այս և վերևում հիշատակված հորիզոնական ուղիղներով սահմանափակված Q ուղղանկյունը կպարունակի M պատկերը, ուստի $S(R) \leq S(Q)$: Մյուս կողմից՝ նրա մակերեսը հավասար կլինի $wnes$ քառանկյան մակերեսի կրկնապատիկին, հետևաբար՝

$$S(R) \leq S(Q) = 2S(wnes) \leq 2S(M):$$

Ինչպես արդեն նշվել է, այս գնահատականը ճշգրիտ է, քանի որ 2 գործակիցը հասանելի է եռանկյան դեպքում:

Հետաքրքրություն է ներկայացնում էլիպսի դեպքը: Քննարկենք $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

կանոնական հավասարումով որոշվող E էլիպսը: Հայտնի է [4], որ եթե էլիպսը պտտենք t անկյան տակ, ապա նրա հենման ուղիղը կգտնվի կոորդինատների սկզբնակետից $p(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$ հեռավորության վրա: Հետևաբար, կոորդինատային առանցքներին զուգահեռ կողմերով և էլիպսը պարունակող փոքրագույն ուղղանկյան մակերեսի համար կունենանք՝

$$S = 4\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}:$$

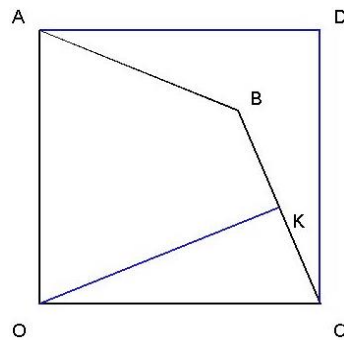
Այս ֆունկցիայի նվազագույն արժեքն է $4ab$, ուստի $S(R) = \frac{4}{\pi} S(E)$:

Վերադառնալով պարփակող ուղղանկյան որոնման խնդրին, նշենք որ [2] հոդվածում հեղինակները նշում են, որ պարփակող ուղղանկյան կողմերից մեկը կամ երկուսն էլ համընկնում են պատկերի լայնությունը որոշող հատվածի հետ: Ստորև բերվող օրինակը ցույց է տալիս, որ դա միշտ չէ, որ տեղի ունի:

Քննարկենք $O(0;0), A(0;1), B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C(1;0)$ գագաթներով քառանկյունը

(նկ. 2): Դժվար չէ համոզվել, որ այն պարփակող ուղղանկյունը $O(0;0), A(0;1), D(1;1), C(1;0)$ քառանկյան է: $OABC$ քառանկյան լայնությունը որոշում է OK ուղղահայացը:

Նկատենք, որ $OADC$ քառակուսու համար (այսինքն՝ $t = 0$ անկյան շրջակայքում) քառանկյան պրոյեկցիաները նույնիսկ լոկալ մինիմում չունեն՝ դրանցից մեկը մոնոտոն աճում է, իսկ մյուսը՝ մոնոտոն նվազում:



Նկ. 2

Լայնության և բարձրության ֆունկցիաները ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$w(t) = \begin{cases} \cos t, -\frac{\pi}{8} < t \leq 0, \\ \sin t + \cos \phi, 0 < t < \frac{\pi}{8}, \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} \cos t - \sin t, -\frac{\pi}{8} < t \leq 0, \\ \cos t, 0 < t < \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Freeman H., Shapira R.** Determining the Minimum-Area Encasing Rectangle for an Arbitrary Closed Curve// Communication ACM.-1975.- 18 (7). -P. 409-413.
2. **Chan C.K., Tan S.T.** Determination of the minimum bounding box of an arbitrary solid: an iterative approach// Computers & Structures - COMPUT STRUCT.- 2001.- Vol. 79, N 15.-P. 1433-1449,.

3. **Lusternik L.A.**, Convex figures and polyhedra.- D. C. Heath and Company, Boston, 1966.
4. **Bourdon P.S., Shapiro J.H.**, The numerical ranges of automorphic composition operators// J. Math. Ann. App.-2000.- 251. - P. 839-854.

Л.З. ГЕВОРГЯН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ОБРАМЛЯЮЩЕГО ПЛОСКИЙ ВЫПУКЛЫЙ КОМПАКТ

Исследованы детали алгоритма поиска прямоугольника с минимальной площадью, содержащего данный плоский выпуклый компакт. Рассматривается соотношение между площадями компакта и обрамляющего прямоугольника.

Ключевые слова: выпуклая фигура, неравенство изопериметрического типа.

L.Z. GEVORGYAN

SOME PROPERTIES OF THE MINIMUM-AREA ENCASING RECTANGLE FOR AN ARBITRARY FLAT CONVEX FIGURE

Some details of the algorithm for determining the minimum-area encasing rectangle for an arbitrary flat convex figure are investigated. The ratio between the areas of the compact figure and the encasing rectangle is considered.

Keywords: convex figure, isoperimetric-type inequality.

УДК 517.946

А.О. БАБАЯН

О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Получена формула для определения дефектных чисел задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения высокого порядка. Предполагается, что соответствующее характеристическое уравнение имеет два различных корня одинаковой кратности. В случае уравнения шестого порядка получена более простая формула, использующая многочлены Чебышева.

Ключевые слова: задача Дирихле, дефектные числа, полиномиальное решение, многочлены Чебышева, правильно эллиптическое уравнение.

Пусть D - единичный круг комплексной плоскости с границей Γ . В работе в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \right)^n u = 0, \quad (1)$$