

3. **Lusternik L.A.**, Convex figures and polyhedra.- D. C. Heath and Company, Boston, 1966.
4. **Bourdon P.S., Shapiro J.H.**, The numerical ranges of automorphic composition operators// J. Math. Ann. App.-2000.- 251. - P. 839-854.

Л.З. ГЕВОРГЯН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ОБРАМЛЯЮЩЕГО ПЛОСКИЙ ВЫПУКЛЫЙ КОМПАКТ

Исследованы детали алгоритма поиска прямоугольника с минимальной площадью, содержащего данный плоский выпуклый компакт. Рассматривается соотношение между площадями компакта и обрамляющего прямоугольника.

Ключевые слова: выпуклая фигура, неравенство изопериметрического типа.

L.Z. GEVORGYAN

SOME PROPERTIES OF THE MINIMUM-AREA ENCASING RECTANGLE FOR AN ARBITRARY FLAT CONVEX FIGURE

Some details of the algorithm for determining the minimum-area encasing rectangle for an arbitrary flat convex figure are investigated. The ratio between the areas of the compact figure and the encasing rectangle is considered.

Keywords: convex figure, isoperimetric-type inequality.

УДК 517.946

А.О. БАБАЯН

О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Получена формула для определения дефектных чисел задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения высокого порядка. Предполагается, что соответствующее характеристическое уравнение имеет два различных корня одинаковой кратности. В случае уравнения шестого порядка получена более простая формула, использующая многочлены Чебышева.

Ключевые слова: задача Дирихле, дефектные числа, полиномиальное решение, многочлены Чебышева, правильно эллиптическое уравнение.

Пусть D - единичный круг комплексной плоскости с границей Γ . В работе в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \right)^n u = 0, \quad (1)$$

где $\lambda_j \neq i$ ($j=0,1$) - такие комплексные числа, что $\Im \lambda_1 > 0 > \Im \lambda_2$ (правильно эллиптическое уравнение). Следует определить решение $u \in C^n(D) \cap C^{(n-1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$ уравнения (1), удовлетворяющее на Γ условиям Дирихле

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial r^k} \right|_{\Gamma} = f_k(x, y), \quad k=0, 1, \dots, n-1 \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь f_k ($k=0, \dots, n-1$)- заданные на Γ функции такие, что $f_k \in C^{(n-1-k, \alpha)}(\Gamma)$;

$\frac{\partial}{\partial r}$ - производная по направлению радиуса-вектора комплексного числа ($z = re^{i\phi}$).

Задача (1), (2) фредгольмова ([1,2]), и в работе [3] получены формулы для определения дефектных чисел этой задачи (т.е. количество линейно независимых решений однородной задачи (1), (2) при $f \equiv 0$ и число линейно независимых условий разрешимости неоднородной задачи). Затем в [4] было показано, что для уравнения (1) при $n=2$ эти формулы можно уточнить. В настоящей работе получены формулы для дефектных чисел при произвольном значении n . Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

$$\mu = \frac{i - \lambda_1}{i + \lambda_1}, \quad \nu = \frac{i + \lambda_2}{i - \lambda_2}, \quad z = \mu\nu. \quad (3)$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\det(S_n^k(1) - S_n^k(z)) \neq 0, \quad k = n+1, n+2, \dots, \quad (4)$$

где матрица $S_n(z)$ порядка n определяется по формуле

$$S_n(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0(z) & a_1(z) & a_2(z) & \dots & a_{n-1}(z) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $a_k(z) = (-1)^{n-k+1} C_n^{n-k} z^{n-k}$. Если условие (4) нарушается при некотором k , то соответствующая однородная задача имеет ненулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие. Таким образом, дефектные числа задачи равны количеству номеров, при которых нарушается условие (4).

Доказательство. Так как при произвольном n доказательство аналогично, для простоты изложения рассмотрим случай $n = 3$. Определим числа μ и ν по формулам (3). Тогда, используя формулы, доказанные в [3], получим, что задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\Delta_l = \det \Omega_l = \det \begin{pmatrix} A & BH^l \\ AM^l & B \end{pmatrix} \neq 0, \quad l = 4, 5, \dots, \quad (6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ \mu^2 & 2\mu & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2\nu & \nu^2 \\ 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \nu & 1 & 0 \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Вынесем в детерминанте Δ_l из последних трех столбцов ν^l , ν^{l+1} , ν^{l+2} соответственно, а затем умножим вторую, третью, четвертую, пятую и шестую строки на ν , ν^2 , ν^l , ν^{l+1} и ν^{l+2} . Получаем условие однозначной разрешимости, эквивалентное (6):

$$\Lambda_l = \det \Theta_l = \det \begin{pmatrix} P & QV^l \\ PW^l & Q \end{pmatrix} \neq 0, \quad l = 4, 5, \dots, \quad (7)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ z^2 & 2z & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя матричное тождество

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -W^l P^{-1} & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & QV^l \\ PW^l & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & QV^l \\ 0 & P^{-1}Q - W^l P^{-1}QV^l \end{pmatrix},$$

сводим условие (7) к эквивалентной форме:

$$X_k = \det(P^{-1}Q - W^k P^{-1}QV^k) \neq 0, \quad k = 4, 5, \dots$$

или

$$Y_k = \det\left(\left(QV^{-1}Q^{-1}\right)^k - \left(PWP^{-1}\right)^k\right) \neq 0, \quad k = 4, 5, \dots \quad (8)$$

Учитывая, что

$$QV^{-1}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = S_3(1),$$

$$PWP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z^3 & -3z^2 & 3z \end{pmatrix} = S_3(z),$$

завершаем доказательство теоремы.

Отметим, что формулу (4) при $n = 3$ можно преобразовать, используя многочлены Чебышева. Учитывая, что формулу (8) можно представить в виде

$$Y_k = \det(QV^{-k}Q^{-1} - PW^k P^{-1}) \neq 0, \quad k = 4, 5, \dots,$$

и используя равенства

$$QV^{-k}Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(k-1)(k-2)}{2} & -k(k-2) & \frac{k(k-1)}{2} \\ \frac{k(k-1)}{2} & -(k+1)(k-1) & \frac{k(k+1)}{2} \\ \frac{k(k+1)}{2} & -k(k+2) & \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{pmatrix},$$

$$PW^k P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(k-1)(k-2)}{2} z^k & -k(k-2)z^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} z^{k-2} \\ \frac{k(k-1)}{2} z^{k+1} & -(k+1)(k-1)z^k & \frac{k(k+1)}{2} z^{k-1} \\ \frac{k(k+1)}{2} z^{k+2} & -k(k+2)z^{k+1} & \frac{(k+2)(k+1)}{2} z^k \end{pmatrix},$$

получим, что формула (8) эквивалентна следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} \frac{(k-1)(k-2)}{2}(1-z^k) & -k(k-2)(1-z^{k-1}) & \frac{k(k-1)}{2}(1-z^{k-2}) \\ \frac{k(k-1)}{2}(1-z^{k+1}) & -(k+1)(k-1)(1-z^k) & \frac{k(k+1)}{2}(1-z^{k-1}) \\ \frac{k(k+1)}{2}(1-z^{k+2}) & -k(k+2)(1-z^{k+1}) & \frac{(k+2)(k+1)}{2}(1-z^k) \end{vmatrix} \neq 0$$

при $k = n+1, \dots$. Далее, учитывая, что многочлен Чебышева второго рода определяется по формуле

$$U_{m-1}(t) = \frac{z^m - z^{-m}}{z - z^{-1}}, \quad t = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

получим условие, эквивалентное (8):

$$\begin{vmatrix} \frac{(k-1)(k-2)}{2}U_{k-1}(t) & -k(k-2)U_{k-2}(t) & \frac{k(k-1)}{2}U_{k-3}(t) \\ \frac{k(k-1)}{2}U_k(t) & -(k^2-1)U_{k-1}(t) & \frac{k(k+1)}{2}U_{k-2}(t) \\ \frac{k(k+1)}{2}U_{k+1}(t) & -k(k+2)U_k(t) & \frac{(k+2)(k+1)}{2}U_{k-1}(t) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9)$$

Раскрывая детерминант в последней формуле и используя свойства многочленов Чебышева (см.[5]), получим условие, эквивалентное (4):

$$U_{3k-1}(x) - \left(4(k^4 + k^2)(x^2 - 1)^2 + 12k^2(x^2 - 1) + 6 \right) U_{k-1}(x) + 8x(x^2 - 1)T_k(x) \neq 0, \quad k = 4, 5, \dots \quad (10)$$

Здесь x определяется формулой $x = 0.5(z + z^{-1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tovmasyan N.E.** Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields.- World Scientific Publishing Co. Ltd. Singapore, N.-J., London, Hong-Kong, 1998.-236p.
2. **Lions J.-L., Magenes E.** Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. I, Dunod. – Paris, 1968.-372p.
3. **Бабаян А.О.** О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге // Известия НАН Армении. Математика.-2003.- Том 38(6). - С.39-48.
4. **Бабаян А.О.** О задаче Дирихле для некоторых дифференциальных уравнений четвертого порядка // Тезисы докладов Межд. конф. "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV".- Ростов-на-Дону, 2014.-С.75.
5. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т.2.- М.: Наука, 1974.- 296с.

Ա.Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ

ՊԱՏԻԿ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴԻԻ ԴԵՖԵԿՏԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ստացվել է բարձր կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի դեֆեկտային թվերի որոշման բանաձևը: Ենթադրվում է, որ համապատասխան բնութագրիչ հավասարումն ունի միևնույն պատիկության երկու տարբեր արմատ: Չեբիշևի բազմանդամներն օգտագործելով՝ ստացվել է ավելի պարզ բանաձև վեցերորդ կարգի հավասարման համար:

Առանցքային բառեր. Դիրիխլեի խնդիր, դեֆեկտային թվեր, բազմանդամային լուծում, Չեբիշևի բազմանդամներ, ճշգրիտ էլիպսական հավասարում:

A.O. BABAYAN

ON DEFECT NUMBERS OF DIRICHLET PROBLEM IN CASE OF MULTIPLE ROOTS

A formula for determining the defect numbers of Dirichlet problem for higher order properly elliptic equation is obtained. It is supposed that the corresponding characteristic equation has two distinct roots of the same multiplicity. In the case of the sixth order equation, a simpler formula using Chebyshev polynomials is obtained

Keywords: Dirichlet problem, defect numbers, polynomial solution, Chebyshev polynomials, properly elliptic equation.

УДК 517. 948

С.А. ЕПИСКОПОСЯН

О СУЩЕСТВОВАНИИ НУЛЬ - РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ УОЛША В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ L^1_μ

Рассматриваются весовые пространства $L^1_\mu[0,1]$ и вопрос существования нуль-рядов по обобщенной системе Уолша.

Ключевые слова: обобщенная система Уолша, нуль-ряд, весовое пространство.

Одним из направлений теории ортогональных рядов является проблема единственности представления функции в виде ряда по некоторой ортогональной системе функций. Вопрос единственности представления функции в виде ряда по некоторой системе ортогональных функций впервые был изучен в теории тригонометрических рядов.

Вопросы единственности представления функции сходящимися к ней рядами тесно связаны с так называемыми U - и M -множествами, которые определяются следующим образом: