

Г.М. АЙРАПЕТЯН, В.Г. ПЕТРОСЯН

ЗАДАЧА РИМАНА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Исследуется граничная задача Римана в единичном круге в весовом пространстве $L^1(\rho)$. Требуется определить аналитическую вне окружности $T = \{z: |z|=1\}$ функцию $\Phi(z)$, $\Phi(\infty)=0$ так, чтобы имело место $\lim_{r \rightarrow 1-} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} = 0$, где $f \in L^1(\rho)$, $a(t) \in C^\delta(T)$, $\delta > 0$. Устанавливается нормальная разрешимость этой задачи.

Ключевые слова: задача Римана, весовое пространство, граничное условие, факторизация.

1. Пусть $D^+ = \{z: |z| < 1\}$ – единичный круг в z -комплексной плоскости, $T = \{z: |z|=1\}$ – единичная окружность и $D^- = \{z: |z| > 1\}$. В настоящей работе рассматривается граничная задача Римана в весовом пространстве $L^1(\rho)$, где

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^m |t - t_k|^{\alpha_k}, \quad t_k \in T, \quad \alpha_k > -1, k=1, 2, \dots, m.$$

Задача R. Пусть f – произвольная на T функция из класса $L^1(\rho)$. Следует определить аналитическую в $D^+ \cup D^-$ функцию $\Phi(z)$, $\Phi(\infty)=0$ так, чтобы имело место граничное условие

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad (1)$$

где $a(t) \neq 0$ – произвольная функция из класса $C^\delta(T)$, $\delta > 0$, а $\Phi^\pm(z)$ – сужение функции $\Phi(z)$ на $D^\pm$ соответственно.

Граничная задача Римана в пространстве L^1 в постановке (1) рассмотрена в работе [1]. В работах [2 и 3] исследована задача Дирихле в весовых пространствах в постановке

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \|U(rt) - f(t)\|_{L^1(\rho)} = 0$$

и установлены условия на ρ , при которых данная задача нормально разрешима.

2. Пусть $\kappa = \text{ind} a(t)|_T$. Тогда

$$a(t) = S^+(t) \cdot (S^-(t))^{-1},$$

где

$$S^+(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\ln(t^{-\kappa} a(t))}{t-z} dt \right\}, \quad z \in D^+,$$

$$S^-(z) = z^{-\kappa} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\ln(t^{-\kappa} a(t))}{t-z} dt \right\}, \quad z \in D^-.$$

Положим

$$n_k = \begin{cases} [\alpha_k] + 1, & \text{если } \alpha_k \text{ нецелое,} \\ \alpha_k, & \text{если } \alpha_k \text{ целое.} \end{cases}$$

Имеет место (см. [3]):

Лемма 1. Пусть $t_0 \in T$ – произвольная точка и $\lambda \in [0;1)$. Тогда

а) $\sup_{\substack{r \in (0,1) \\ \tau \in T}} |t_0 - \tau|^\lambda \int_T \frac{(1-r)^\delta}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|} |dt| < \infty, \delta > 0;$

б) $\sup_{\substack{r \in (0,1) \\ \tau \in T}} |t_0 - \tau|^\lambda \int_T \frac{1-r^2}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|^2} |dt| < \infty;$ в) $\sup_{\substack{r \in (0,1) \\ \tau \in T}} |t_0 - \tau|^\lambda \int_T \frac{1-r^2}{|t_0 - rt|^{1+\lambda} |\tau - rt|} |dt| < \infty.$

Лемма 2. Пусть $f \in L^1(\rho)$ и $\Phi(z)$ – некоторое решение задачи (1). Тогда его можно представить в виде:

а) если $N + \kappa \geq 0$, где $N = \sum_{k=1}^m n_k$, то

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i \Pi(z)} \int_T \frac{f(t) \Pi(t)}{S^+(t)(t-z)} dt + \frac{S(z)P(z)}{\Pi(z)}, \quad (2)$$

где $P(z)$ – некоторый полином порядка $N + \kappa - 1$ и $\Pi(z) = \prod_{k=1}^m (t_k - z)^{n_k}$;

б) если $N + \kappa < 0$, то $\Phi(z)$ имеет представление (2), где $P(z) \equiv 0$, и функция f удовлетворяет условиям

$$\int_T \frac{f(t) \Pi(t)}{S^+(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(N + \kappa) - 1. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $N + \kappa \geq 0$. Так как $-1 < \alpha_k - n_k \leq 0$, то из условия (1) следует

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \left| \frac{\Phi^+(rt)\Pi(t)}{S^+(t)} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)\Pi(t)}{S^-(t)} - \frac{f(t)\Pi(t)}{S^+(t)} \right| dt = 0.$$

Обозначим

$$\Psi_r^+(z) = \frac{\Phi^+(rz)\Pi(z)}{S^+(z)}, \quad \Psi_r^-(z) = \frac{\Phi^-(r^{-1}z)\Pi(z)}{S^+(z)}.$$

Положив $\Psi_r^+(t) - \Psi_r^-(t) = f_r(t)$, получим граничную задачу Римана относительно функции Ψ_r .

Так как функция Ψ^- имеет полюс порядка $N + \kappa - 1$ в бесконечности, то получаем

$$\Psi_r^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_r(t)dt}{t-z} + P_r(z), \quad z \in D^\pm,$$

где $P_r(z)$ – полином порядка $N + \kappa - 1$. Так как

$$f_r(t) \rightarrow \frac{f(t)\Pi(t)}{S^+(t)}, \quad \Psi_r(z) \rightarrow \frac{\Phi(z)\Pi(z)}{S^+(z)}$$

при $r \rightarrow 1-0$, то, переходя к пределу, получаем доказательство утверждения “а” леммы.

Если $N + \kappa < 0$, то $P_r(z) \equiv 0$ и

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i \Pi(z)} \int_T \frac{f(t)\Pi(t)}{S^+(t)(t-z)} dt.$$

Поскольку функция $S(z)(\Pi(z))^{-1}$ имеет полюс порядка $-(N + \kappa)$, то получаем условия (3).

3. Обозначим

$$K(f, z) = \frac{S(z)}{2\pi i \Pi(z)} \int_T \frac{f(t)\Pi(t)}{S^+(t)(t-z)} dt. \quad (4)$$

Лемма 3. Пусть $f \in L^1(\rho)$, тогда

$$\|K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)},$$

где C – постоянная, не зависящая от r , $r \in (0, 1)$.

Доказательство. Положим

$$K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$I_1(r, t) = \frac{S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i \Pi(rt)} \int_T \frac{f(\tau)\Pi(\tau)}{S^+(\tau)(\tau - rt)} d\tau,$$

$$I_2(r, t) = \frac{a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i} \left(\frac{1}{\Pi(rt)} \int_T \frac{f(\tau)\Pi(\tau)}{S^+(\tau)(\tau - rt)} d\tau - \frac{1}{\Pi(r^{-1}t)} \int_T \frac{f(\tau)\Pi(\tau)}{S^+(\tau)(\tau - r^{-1}t)} d\tau \right).$$

Поскольку $|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| < A(1-r)^\delta$, $\delta > 0$, то

$$|I_1(r, t)| \leq \frac{A(1-r)^\delta}{|\Pi(rt)|} \int_T \frac{|f(\tau)\Pi(\tau)|}{|S^+(\tau)(\tau - rt)|} |d\tau|.$$

Из леммы 1 легко установить, что

$$\|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho)} \leq A\|f\|_{L^1(\rho)}, \quad \|I_2(r, t)\|_{L^1(\rho)} \leq A\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Лемма 4. Если $f \in L^1(\rho)$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \|K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Пусть $f \in L^1(\rho)$ и $f(t) \equiv 0$ в окрестности T_1^k точки t_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Обозначим через T_1 объединение этих интервалов. Тогда функция

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)\Pi(\tau)}{S^+(\tau)(\tau - z)} d\tau$$

аналитична на T_1 . То есть $\Phi_1(z) = A_0^{(i)} + A_1^{(i)}(z - t_i) + \dots + A_k^{(i)}(z - t_i)^k + \dots$, где

$$A_k^{(i)} = \frac{k!}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)\Pi(\tau)}{S^+(\tau)(\tau - t_i)^{k+1}} d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Заметим что $|\Phi_1(rt) - \Phi_1(r^{-1}t)| < A(1-r)$ в окрестностях этих точек. Поэтому $K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) = I_1(r, t) + I_2(r, t)$, где

$$I_1(r, t) = \frac{S^+(rt)\Phi_1(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\Phi_1(r^{-1}t)}{\Pi(rt)},$$

$$I_2(r, t) = a(t)S^-(r^{-1}t)\Phi_1(r^{-1}t) \left(\frac{1}{\Pi(rt)} - \frac{1}{\Pi(r^{-1}t)} \right).$$

Поскольку в окрестностях точек t_k

$$|S^+(rt)\Phi_1(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\Phi_1(r^{-1}t)| < C(1-r)^\delta, \quad \delta > 0,$$

будем иметь

$$\int_{T_1^k} |I_1(r, t)| \rho(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0.$$

Для любой точки $t \in T_1^k$ имеем

$$\int_{T_1^k} |I_2(r, t)| \rho(t) dt \leq C \left(\int_{T_1^k} \frac{(1-r)}{|(t_k - rt)|^{n_k - \alpha_k}} |dt| + \int_{T_1^k} \frac{(1-r)}{|(t_k - rt)|^{n_k - \alpha_k + 1}} |dt| \right).$$

Учитывая, что

$$\int_{T_1^k} \frac{(1-r)}{|(t_k - rt)|^{n_k - \alpha_k}} |dt| \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0, \quad \int_{T_1^k} \frac{(1-r)}{|(t_k - rt)|^{n_k - \alpha_k + 1}} |dt| \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0,$$

будем иметь

$$\int_{T_1^k} |K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t)| \rho(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0.$$

Далее, предположим $t \in T \setminus T_1$. Из $f(t)\Pi(t) \in L^1(T)$ имеем, что функция

$$\Phi_2(z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)\Pi(\tau)}{S^+(\tau)(\tau - z)} d\tau$$

удовлетворяет условию

$$\|\Phi_2^+(rt) - a(t)\Phi_2^-(r^{-1}t) - f(t)\Pi(t)\|_{L^1(\rho)} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0.$$

Пусть $f \in L^1(\rho)$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию $f_\varepsilon \in L^1(\rho)$ такую, что $f_\varepsilon \equiv 0$, если $t \in T_1$ и $f - f_\varepsilon|_{L^1(\rho)} < \varepsilon$. Из леммы 3 имеем

$$K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) - f(t)|_{L^1(\rho)} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0.$$

4. Для однородной задачи R, то есть при $f \equiv 0$, имеет место:

Теорема 1. а) Если $N + \kappa \geq 0$, то решение задачи R принимает следующий вид:

$$\Phi_0(z) = S(z) \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} A_j^k (t_k - z)^{-j} \right) + P(z),$$

где $P(z)$ есть полином порядка $\kappa - 1$ в случае $\kappa > 0$, в противном случае $P(z) \equiv 0$.

б) Если $N + \kappa < 0$, то однородная задача имеет только нулевое решение.

Для неоднородной задачи R имеет место следующая теорема.

Теорема 2. а) Если $N + \kappa \geq 0$, то

$$\Phi(z) = K(f, z) + \Phi_0(z),$$

где $K(f, z)$ – решение задачи R, имеющее вид (4), а $\Phi_0(z)$ – решение однородной задачи R;

б) Если $N + \kappa < 0$, то задача R имеет только одно решение $K(f, z)$ а f удовлетворяет условиям (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айрапетян Г.М.** Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1 // Изв. АН АрмССР. Математика. –1990. –XXY,1. –С. 3-20.
2. **Kazaryan K.S.** Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals // Studia Math. –1987. –Vol.86. –P. 97-130.
3. **Найрапетян Н.М.** Dirichlet Problem in weighted spaces // Izv. NAN Armenii. Matematika. –2001. –№36 (3). –P. 22-44.

Հ.Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Վ.Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՌԻՄԱՆԻ ԽՆԴԻՐԸ ԿՇՈՒՄԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Դիտարկվում է Ռիմանի եզրային խնդիրը միավոր շրջանում $L_1(\rho)$ կշռային տարածությունում: Պահանջվում է որոշել $T = \{z: |z|=1\}$ շրջանագծից դուրս անալիտիկ $\Phi(\Phi(\infty)=0)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է $\lim_{r \rightarrow 1-} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} = 0$ պայմանը, որտեղ $f \in L^1(\rho), a(t) \in C^\delta(T), \delta > 0$: Ապացուցված է խնդրի նորմալ լուծելիությունը:

Առանցքային բառեր. Ռիմանի խնդիր, կշռային տարածություն, եզրային պայման, ֆակտորիզացիա:

H.M. HAYRAPETYAN, V.G. PETROSYAN

RIEMANN PROBLEM IN WEIGHTED SPACES

Riemann boundary value problem in the unit disc in weighted space $L_1(\rho)$ is investigated. It is necessary to determine the analytic function $\Phi(\Phi(\infty)=0)$ outside the circumference $T = \{z: |z|=1\}$ satisfying the condition $\lim_{r \rightarrow 1-} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} = 0$ where $f \in L^1(\rho), a(t) \in C^\delta(T), \delta > 0$. The normal solvability of this problem is proved.

Keywords: Riemann problem, weighted space, boundary condition, factorization.