

УДК 681.51

С.Ш. БАЛАСАНЯН, Э.М. ГЕВОРГЯН

**ПОСТРОЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВИРТУАЛЬНОГО
ОБЪЕКТА В СРЕДЕ LABVIEW
(Капан)**

Рассматривается виртуальная лаборатория, которая включает имитационное моделирование виртуальных объектов и построение их статистических моделей в программной среде LabVIEW. Предложенная лаборатория имитирует функционирование виртуального объекта, формализованного в виде стохастической постулированной модели с помощью метода невырожденного многомерного распределения. На основании статистической выборки, получаемой в результате имитационного моделирования виртуального объекта, строится его регрессионная модель.

Ключевые слова: модель, имитация, регрессия, адекватность, виртуальный объект.

Введение. Построение математической модели технологических процессов часто осуществляется методами регрессионного анализа на основании статистических данных, полученных в результате пассивного наблюдения. Однако сбор статистических данных о входных и выходных переменных реального объекта связан с большими материальными и временными затратами. В связи с этим возникает необходимость разработки виртуальной лаборатории, предоставляющей возможность построения моделей виртуальных объектов, замещающих реальные объекты исследования.

В данной работе рассматриваются вопросы разработки виртуального объекта и построения его статистической модели методом регрессии в среде LabVIEW.

Теоретические основы и структура виртуальной лаборатории. Виртуальный объект задается значениями параметров μ_j, σ_j (математического ожидания и среднеквадратического отклонения) входных переменных $\tilde{x}_j (j = \overline{1, m})$ объекта, взаимной корреляционной матрицей $\|r_{ij}\|, (i, j = \overline{1, m})$, среднеквадратическим отклонением σ_ε случайного возмущения ε и постулированной моделью [1] исследуемого объекта:

$$\tilde{y} = G(\tilde{x}, \beta) + \tilde{\varepsilon}, \quad (1)$$

где $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m)$ - случайный вектор входных (независимых) переменных; $\tilde{y}$ - случайная выходная (зависимая) переменная; $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ - вектор

коэффициентов постулированной модели; $\tilde{\varepsilon}$ - случайная величина (случайное возмущение, ошибка, шум), формально учитывающая влияние случайных факторов. Предполагается, что как переменные модели, так и случайное возмущение $\tilde{\varepsilon}$ распределены нормально ($M[\tilde{\varepsilon}] = 0$, $\sigma_{\varepsilon}^2 = \text{const}$).

Виртуальная лаборатория, блок-схема которой приведена на рис. 1, функционирует следующим образом. Блок 1 осуществляет ввод исходных данных моделирования: значения параметров μ_j, σ_j , корреляционную матрицу $\|r_{ij}\|, (i, j = \overline{1, m})$ входных переменных моделируемого объекта, значения σ_{ε} случайного возмущения ε и требуемое количество n имитируемых статистических данных. Затем блоки 2-4 осуществляют имитацию функционирования исследуемого объекта в соответствии с соотношением (1), т.е. моделируют возможные реализации вектора входных переменных $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m)$ методом невырожденного многомерного нормального распределения [2] и случайного возмущения $\tilde{\varepsilon}$, после чего в соответствии с заданной функцией $G(x, \beta)$ формируют возможные значения выходной переменной $\tilde{y}$. Далее на основании полученных в результате имитационного моделирования исследуемого виртуального объекта статистических данных $\{x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}, y_i, : i = \overline{1, n}\}$ (блок 5) методом регрессии [1] строится регрессионная модель объекта (блок 6), а блок 7 выдает результаты моделирования.

Использование метода моделирования невырожденного многомерного нормального распределения основывается на использовании ковариационной матрицы C , элементы которой вычисляются по следующей формуле:

$$c_{ij} = r_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (2)$$

где σ_i, σ_j - среднеквадратические отклонения входных переменных x_i, x_j ($i, j = \overline{1, m}$), а r_{ij} - коэффициент корреляции между этими переменными, т.е. соответствующий элемент корреляционной матрицы R .

Как известно, случайный вектор $\mathbf{x}$ с вышеуказанными характеристиками можно получить специальным линейным преобразованием случайного нормально распределенного стандартизованного вектора $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$, компоненты которого, в сущности, нормально распределенные случайные величины с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$:

$$\mathbf{x} = A \cdot \mathbf{z} + \boldsymbol{\mu}. \quad (3)$$

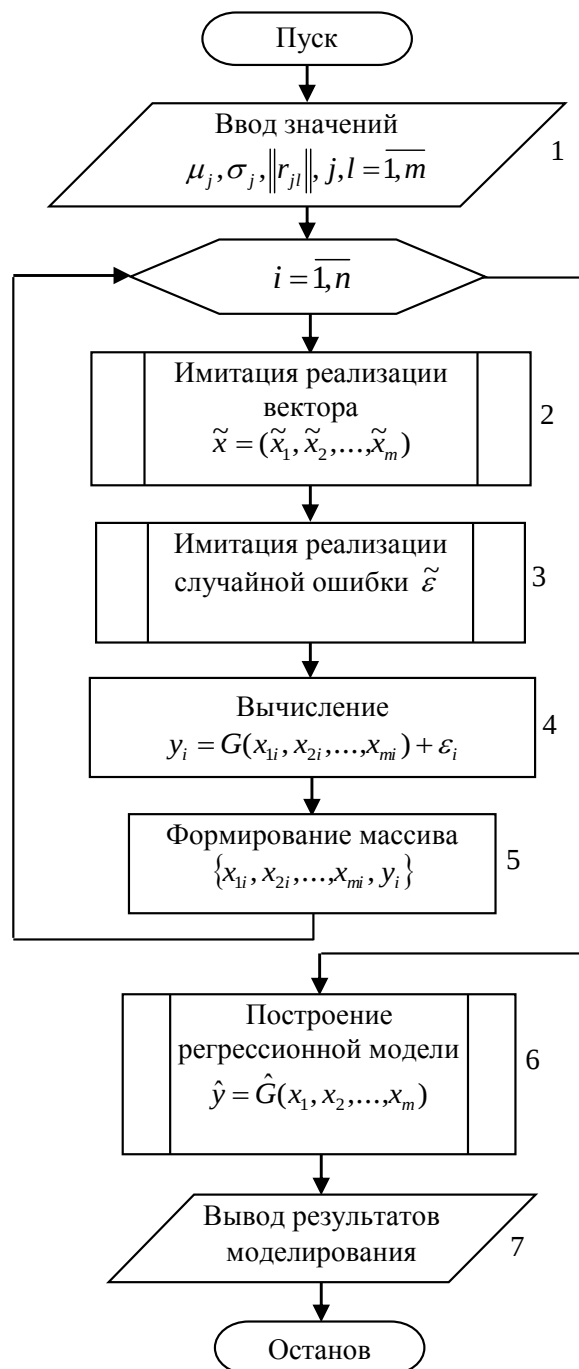


Рис. 1. Блок-схема виртуальной лаборатории

Коэффициенты a_{ij} (элементы матрицы A) определяются рекуррентной процедурой:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{c_{11}}; \\ a_{21} &= \frac{c_{12}}{a_{11}} = \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}}}; \\ a_{22} &= \sqrt{c_{22} - \frac{c_{21}^2}{c_{11}}}. \end{aligned}$$

Общая рекуррентная формула расчета коэффициента a_{ij} имеет вид

$$a_{ij} = \frac{c_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} \cdot a_{jk}}{\sqrt{c_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}}, \quad (4)$$

$$\left(\sum_{k=1}^0 a_{ik} \cdot a_{jk} = 0 \right), 1 \leq j \leq i \leq m.$$

Моделирующий алгоритм невырожденного многомерного нормально распределенного случайного вектора $\mathbf{z}$ включает подалгоритм расчета ковариационной матрицы C по формуле (2), коэффициентов a_{ij} матрицы A по формуле (4) и формирования реализаций нормально распределенного случайного вектора $\mathbf{x}$ согласно соотношению (3).

Моделирование реализаций стандартизованного случайного вектора $\mathbf{z}$ осуществляется на основе известной центральной предельной теоремы теории вероятности (теорема Ляпунова) согласно соотношению

$$z_i = \sum_{j=1}^{12} r_j - 6, \quad (5)$$

где r_i – равномерно распределенная в интервале $[0;1]$ случайная величина.

Блок-диаграмма предложенной виртуальной лаборатории, реализованной в среде LabVIEW, приведена на рис. 2.

Предлагаемая виртуальная лаборатория позволяет студентам оценить адекватность построенной регрессионной модели как путем сопоставления коэффициентов регрессионной и постулированной моделей, так и с помощью коэффициента детерминации и F -критерия Фишера.

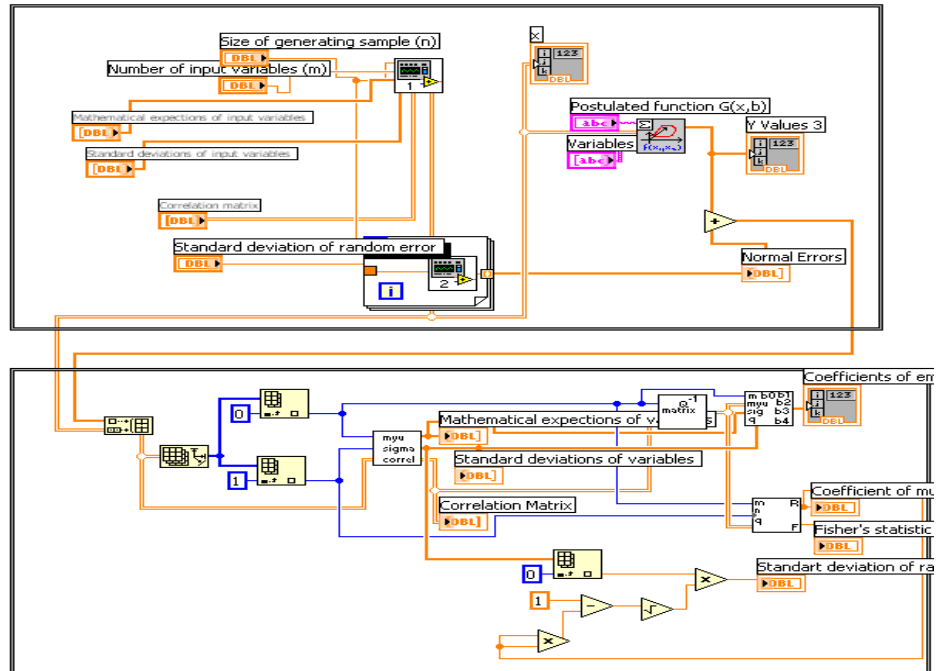


Рис. 2. Блок-диаграмма виртуальной лаборатории

Численный пример. Пусть исследуемый технологический процесс формализован в виде постулированной вероятностной модели:

$$\tilde{y} = G(\tilde{x}, \beta) + \tilde{\varepsilon} = 2.5 + 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{\varepsilon},$$

заданной следующими параметрами (рис. 3):

- число входных параметров – 2;
- число реализаций имитационной модели – 50;
- коэффициенты постулированной модели – $\beta_0 = 2,5$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = -2$;
- математические ожидания и стандартные отклонения входных переменных – $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 3$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$;
- корреляционная матрица:

$$\|r_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{vmatrix};$$

- стандартное отклонение случайной ошибки $\sigma_{\varepsilon} = 0,1$.

Input Data of Simulation Output Data

Postulated Function $G(x, \beta)$
 Variables

Number of Input Variables

Number of Realizations (Size of Sample)

Mathematical Expectations of Input Variables

Standard Deviations of Input Variables

Correlation Matrix

1	0.5
0.5	1

Standard Deviation of Random Error

Рис. 3. Лицевая панель для исходных данных моделирования

Input Data of Simulation Output Data

Statistical Estimates

Mathematical Expectations of Variables

Standard Deviations of Variables

Correlation Matrix

1	0.9202	0.8299
0.9202	1	0.4801
0.8299	0.4801	1

Coefficients of Regression Model

Coefficient of Multiple Correlations

Fisher's statistic

Standard Deviation of Random Error

Рис. 4. Лицевая панель для результатов моделирования

В результате имитационного моделирования виртуального объекта сгенерирована статистическая выборка $\{(x_{1i}, x_{2i}, y_i) : i = \overline{1, 50}\}$, на основании которой построена регрессионная модель виртуального объекта, т.е. вычислены следующие статистические оценки ее заданных параметров (рис. 4):

- математические ожидания и стандартные отклонения входных и выходной переменной (μ_0, σ_0): $\hat{\mu}_1 = 9,72$, $\mu_2 = 3,25$, $\hat{\sigma}_1 = 2,3$, $\hat{\sigma}_2 = 0,97$, $\mu_0 = 25,2$, $\sigma_0 = 2,5$;

- коэффициенты регрессии и их стандартные отклонения:
 $\hat{\beta}_0 = 2,5501$, $\hat{\beta}_1 = 2,9711$, $\hat{\beta}_2 = -2,1041$, $\hat{\sigma}_1 = 2,3115$, $\hat{\sigma}_2 = 0,9701$;

- корреляционная матрица между всеми переменными:

$$\|\hat{r}_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0,92 & 0,83 \\ 0,92 & 1 & 0,48 \\ 0,83 & 0,48 & 1 \end{vmatrix};$$

- стандартное отклонение случайной ошибки $\hat{\sigma}_e = 0,0815$.

Как видно из сравнения заданных параметров с их статистическими оценками, построенная регрессионная модель адекватна виртуальному объекту, что подтверждается достаточно высокими расчетными значениями коэффициента детерминации ($R^2 = 0,95$) и F -критерия ($\hat{F} = 446,5$).

Закключение. Виртуальная лаборатория дает возможность построить модель виртуального объекта, заменяющую реальный объект исследования, и оценить ее адекватность как визуально, так и с помощью коэффициента детерминации и критерия Фишера. Лаборатория позволяет многократно повторить имитационный эксперимент с моделью виртуального объекта с целью исследования влияния изменений заданных параметров объекта на адекватность построенной модели. Использование предложенной лаборатории также предоставляет возможность проиллюстрировать основные достоинства LabVIEW.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ.- М.: Издательский дом «Вильямс», 2007.- 912 с.
2. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс.- СПб.: Невский диалект, 2009.- 192с.

Ս.Շ. ԲԱԼԱՍԱՆՅԱՆ, Հ.Մ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՎԻՐՏՈՒԱԼ ՕԲՅԵԿՏԻ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՄՈՂԵԼԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ LABVIEW ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Դիտարկված է վիրտուալ լաբորատորիա, որը ներառում է վիրտուալ օբյեկտների նմանակային մոդելավորումը և դրանց վիճակագրական մոդելների կառուցումը LabVIEW միջավայրում: Առաջարկված լաբորատորիան նմանակում է պոստուլացված հավանականային մոդելի տեսքով ձևայնացված վիրտուալ օբյեկտի գործունեությունը՝ չվերասերված բազմաչափ նորմալ բաշխման մեթոդով: Նմանակային մոդելավորման արդյունքում ստացված վիճակագրական ընտրանքի հիման վրա կառուցվում է վիրտուալ օբյեկտի ռեգրեսիոն մոդելը:

Առանցքային բառեր. մոդել, նմանակում, ռեգրեսիա, համարժեքություն, վիրտուալ օբյեկտ:

S.SH. BALASANYAN, H.M. GEVORGYAN

CONSTRUCTING THE STATISTICAL MODEL OF A VIRTUAL OBJECT IN THE LABVIEW ENVIRONMENT

A virtual laboratory including the simulation modeling of virtual objects and the construction of their statistical models in the LabVIEW environment is considered. The proposed laboratory simulates the functioning of the virtual object, formally represented as the stochastic postulated model, using the non-degenerate multivariate normal distribution method. Based on the generated statistical data, obtained as a result of simulation modeling of the investigated virtual object, its regression model is constructed.

Keywords: model, simulation, regression, adequacy, virtual object.