ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄ, ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

УДК 621.52+511.52

С.О. СИМОНЯН, А.В. МЕЛИКЯН, М.Г. ХАЧАТРЯН, К.Г. МКРТЧЯН

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРОНЕКЕРОВСКИХ МАТРИЦ

Рассмотрены вопросы алгоритмизации и программного обеспечения для определения некоторых характеристик (следов, определителей, собственных значений-функций и сингулярных значений-функций) однопараметрических кронекеровских матриц. Во всех случаях в качестве основного математического аппарата выступают дифференциальные преобразования [1, 2], позволяющие получить простые рекуррентные вычислительные процедуры, легко реализуемые средствами современных информационных технологий. Программные средства были реализованы на основе использования объектно-ориентированного языка Python.

Ключевые слова: однопараметрические кронекеровские матрицы, дифференциальные преобразования, следы и определители матрицы, собственные значения-функции, сингулярные значения-функции, современные средства информационных технологий.

1. Математический аппарат

В настоящей работе рассматриваются вопросы определения вышеотмеченных характеристик однопараметрических кронекеровских матриц $A(t)_{n\times n} \otimes B(t)_{m\times m}$ на основе использования соотношений [3]

$$tr[A(t)\otimes B(t)] = trA(t)\cdot trB(t),$$

$$\det[A(t)\otimes B(t)] = (\det A(t))^m \cdot (\det B(t))^n,$$

$$\Lambda_q[A(t)\otimes B(t)] = \lambda_{A(t),i}(t)\cdot \lambda_{B(t),j}(t),\ \ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m},\ \ q=\overline{1,m\cdot n},$$

$$\Omega_l[A(t)\otimes B(t)] = \sigma_{A(t),i}(t)\cdot \sigma_{B(t),j}(t),\ \ i=\overline{1,r_{A(t)}},\ \ j=\overline{1,r_{B(t)}},\ l=\overline{1,r_{A(t)}\cdot r_{B(t)}},$$

аналогичных известным соотношениям дла автономных матриц [4], где $trA(t)$и $trB(t)$ – следы матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно; $\det A(t)$ и $\det B(t)$ - определители матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно; $\lambda_{A(t),i}(t)$ и $\lambda_{B(t),j}(t)$ - собственные значения-функции матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно; Λ_q - собственные значения-функции кронекеровской матрицы; $\sigma_{A(t),i}(t)$ и $\sigma_{B(t),j}(t)$ - сингулярные значения-функции матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно; Ω_l - сингулярные значения-функции кронекеровской матрицы; $r_{A(t)}$ и $r_{B(t)}$ - количества ненулевых сингулярных значений-функций матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно.

Предполагая, что для $A(t)$, $B(t)$, $\lambda_{A(t),i}(t)$, $\lambda_{B(t),j}(t)$, $\sigma_{A(t),i}(t)$ и $\sigma_{B(t),j}(t)$ имеют место дифференциальные преобразования [2,4] в [3] получены соответствующие рекуррентные вычислительные схемы, которые легли в основу разработки блок-схемы и программы по определению вышеотмеченных характеристик однопараметрических кронекеровских матриц (заметим, что в последних соотношениях K -целочисленный аргумент, H - масштабный коэффициент, t_ν - центр аппроксимации, $\mathsf{X}_1(\bullet)-\mathsf{X}_6(\bullet)$ - обратные дифференциальные преобразования, восстанавливающие соответствующие оригиналы).

$$A(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K A(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_\nu},K=\overline{0,\infty} \;\doteq\; A(t)=\mathsf{X}_1(t,t_\nu,H,A(K)),$$

$$B(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K B(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_\nu},K=\overline{0,\infty} \;\doteq\; B(t)=\mathsf{X}_2(t,t_\nu,H,B(K)),$$

$$\lambda_{A(t),i}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K \lambda_{A(t),i}(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_\nu},K=\overline{0,\infty} \;\doteq\; \lambda_{A(t),i}(t)=\mathsf{X}_{3_i}(t,t_\nu,H,\lambda_{A(t),i}(K)),i=\overline{1,n},$$

$$\lambda_{B(t),j}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K \lambda_{B(t),j}(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_\nu},K=\overline{0,\infty} \;\doteq\; \lambda_{B(t),j}(t)=\mathsf{X}_{4_j}(t,t_\nu,H,\lambda_{A(t),j}(K)),\; j=\overline{1,m},$$

$$\sigma_{A(t),i}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K \sigma_{A(t),i}(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_\nu},K=\overline{0,\infty} \;\doteq\; \sigma_{A(t),i}(t)=\mathsf{X}_{5_i}(t,t_\nu,H,\lambda_{A(t),i}(K)),\; i=\overline{1,r_{A(t)}},$$

$$\sigma_{B(t),j}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K \sigma_{B(t),j}(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_\nu},K=\overline{0,\infty} \;\doteq\; \sigma_{B(t),j}(t)=\mathsf{X}_{6_j}(t,t_\nu,H,\lambda_{A(t),j}(K)),\; j=\overline{1,r_{B(t)}},$$

2. Реализация программы на языке Python [5]

Блок-схема программы представлена на рис. 1, а код программы – на рис. 2. Результаты решения модельного примера представлены на рис. 3, которые точно совпадают с аналитическими и численно-аналитическими решениями, полученными в работе [3].

$$A(t)=\begin{bmatrix}(1+t) & (1-t)\\ -t & t^2\end{bmatrix},\quad B(t)=\begin{bmatrix}(1+t) & (1-t)\\ -1 & t\end{bmatrix},$$

$$A(t)\otimes B(t)=\left[\begin{array}{cc|cc}(1+t)^2 & \left(1-t^2\right) & \left(1-t^2\right) & \left(1-t^2\right)\\ (-1-t) & \left(t+t^2\right) & (-1+t) & \left(t-t^2\right)\\ \hline \left(-t-t^2\right) & \left(-t+t^2\right) & \left(t^2+t^3\right) & \left(t^2-t^3\right)\\ t & -t^2 & -t^2 & t^3\end{array}\right]$$

Представим работу блок-схемы программы.

1. Первым шагом вводятся количества строк и столбцов матриц $A(t)$ и $B(t)$.
2. Вторым шагом вводятся элементы матрицы $A(t)$.
3. Третьим шагом вводятся элементы матрицы $B(t)$.
4. Четвертым шагом определяются следы $x(t)=trA(t)$ и $y(t)=trB(t)$ матриц $A(t)$ и $B(t)$.
5. Пятым шагом определяется кронекеровское произведение $Kr=A(t)\otimes B(t)$ матриц $A(t)$ и $B(t)$.
6. Шестым шагом определяется след $Z(t)=tr(A(t)\otimes B(t))$ матрицы Kr.
7. Седьмым шагом определяется детерминант $\det(Kr)$ матрицы Kr.
8. Восьмым шагом определяются собственные значения-функции $\Lambda(Kr)=\lambda(i)\cdot M(j)$ матрицы $Kr\left(\lambda(i)\equiv\lambda_{A(t),i}(t),\ \ \mu(j)\equiv\lambda_{B(t),i}(t)\right)$.
9. Девятым шагом определяются ранги $r(A(t))$ и $r(B(t))$ матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно.
10. Последним шагом определяются и выводятся сингулярные значения-функции матрицы Kr на основе определения сингулярных значений-функций матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно.

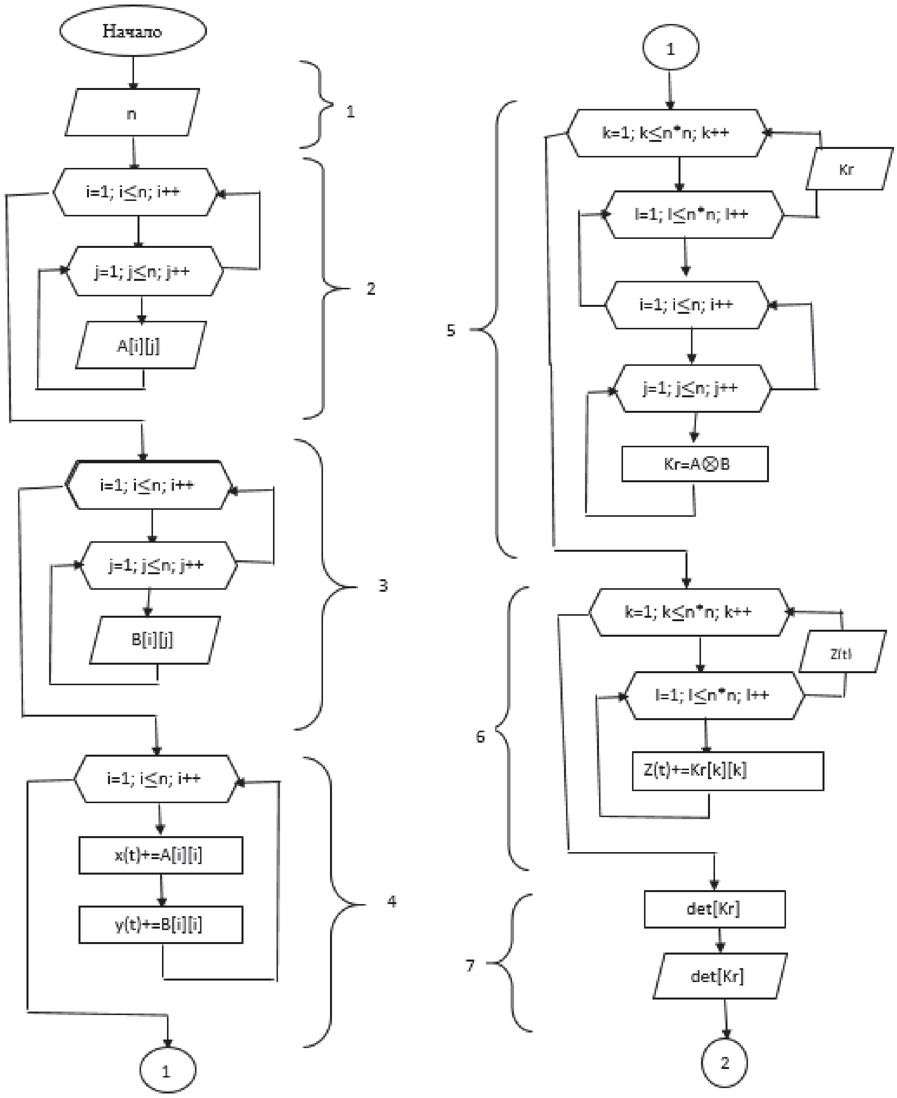

Рис. 1. Блок-схема программы

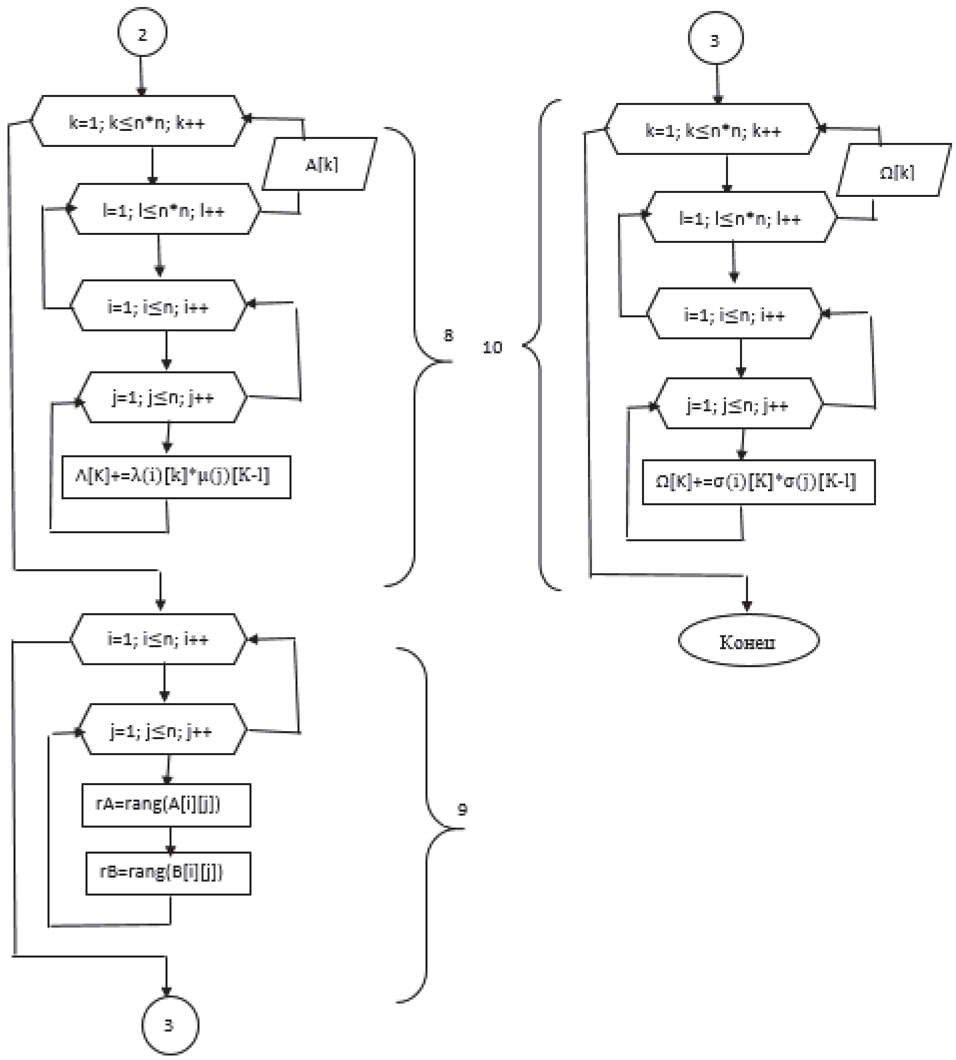

Рис. 1. Продолжение блок-схемы программы

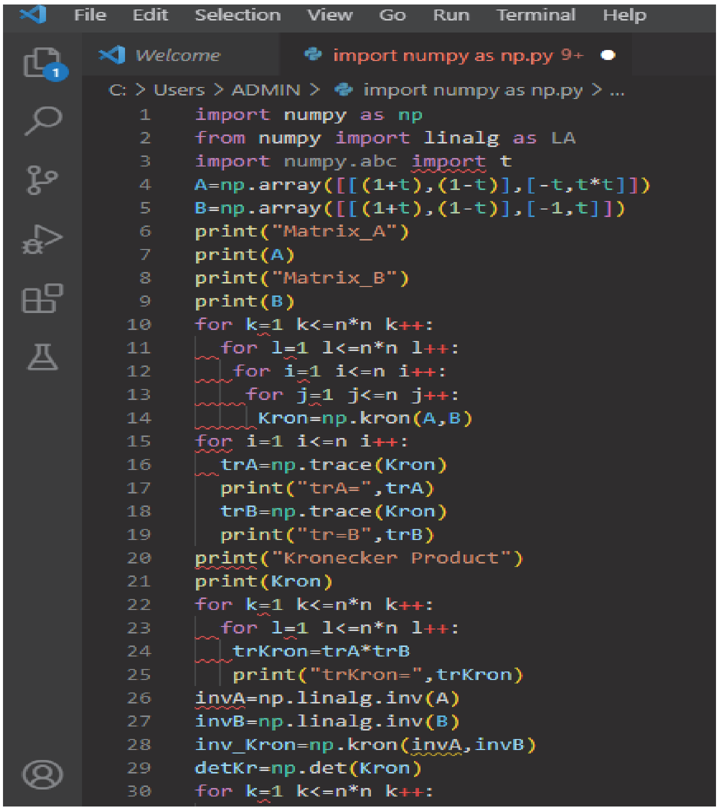

Рис. 2. Код программы

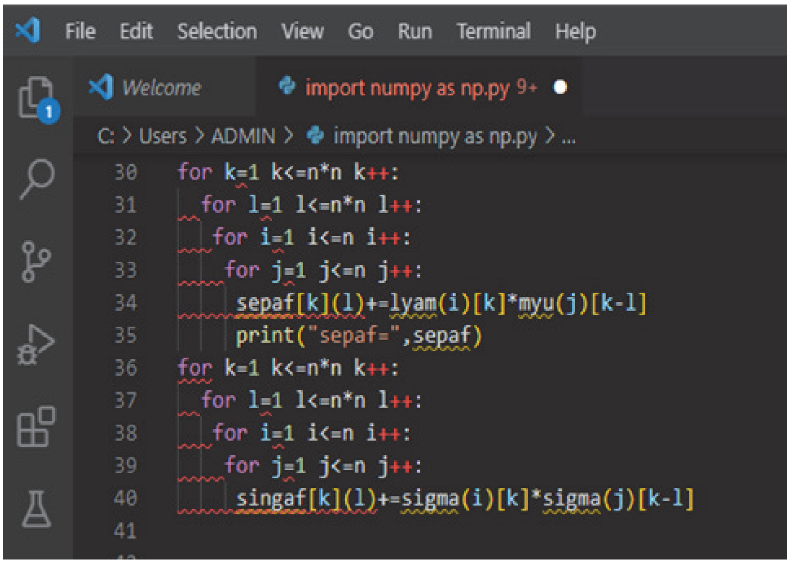

Рис. 2. Продолжение кода програмы

```
Matrix_A
(1+t)  (1-t)
 -t     t*t
Matrix_B
(1+t)  (1-t)
 -1      t
trA=1+t+t^2
trB=1+2t
Kronecker Product
(1+t)^2   (1-t)^2    (1-t)^2     (1-t)^2
(-1-t)    (t+t)^2     (-1+t)     (t-t^2)
(-t-t^2)  (-t+t^2)  (1+t)*t^2  (1-t)*t^2
  t         -t^2       -t^2       t^3
trKron=1+3t+3t^2+2t^3
det[Kr]=t^2+4t^4+6t^6+4t^8+t^10
sepaf[1](1)=1+t^2   sepaf[2](0)=((1+2t)+(4t-3)^(1/2))/2
sepaf[1](2)=t       sepaf[2](2)=((1+2t)-(4t-3)^(1/2))/2
```

Рис. 3. Результаты работы программы

Заключение

Научно-технический прогресс во многом определяется совместным применением возможностей современных информационных технологий, системного анализа, управления, автоматизации и др. При осуществлении таких исследований сложные вычислительные процедуры порождают необходимость разработки новых высокопроизводительных средств (алгоритмов, пакетов прикладных программ и др.), к числу которых, надеемся, относится и настоящая работа. Как показывают исследования, разработке средств с отмеченными характеристиками во многом удовлетворяют дифференциальные преобразования, которые легли в основу настоящей работы. При их использовании появляются возможности расщепления и алгебраизации переменных рассматриваемых задач, а также распараллеливания вычислительных процедур с максимальными степенями упрощения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
2. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований.- Ереван: Издательство ГИУА “Чартарагет”, 2010 .-361с.
3. **Симонян С.О.** К определению некоторых характеристик однопараметрических кронекеровских матриц // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника.- 2020.- №2, – С. 9-25.
4. **Eric Matthes.** Python crash course.- Second edition .- 2019.
5. https://ru.wikipedia.org/wiki/Произведение_Кронекера

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ա.Վ. ՄԵԼԻՔՅԱՆ, Մ.Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ,
Կ.Գ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԿՐՈՆԵԿԵՐՅԱՆ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԱՑՈՒՄՆ ՈՒ ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ԱՊԱՀՈՎՈՒՄԸ

Դիտարկվել են միապարամետրական կրոնեկերյան մատրիցների որոշ բնութագրերի (հետքերի, որոշիչների, սեփական արժեքներ-ֆունկցիաների և սինգուլյար արժեքներ-ֆունկցիաների) որոշման համար ալգորիթմացման և ծրագրային ապահովման հարցերը: Բոլոր դեպքերում որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ հանդես են եկել դիֆերենցիալ ձևափոխությունները, որոնք թույլ են տալիս ստանալ ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցով հեշտությամբ իրականացվող պարզագույն անդրադարձ հաշվողական ընթացակարգեր: Ծրագրային միջոցներն իրականացվել են օբյեկտա-կողմնորոշված Python լեզվի օգտագործմամբ:

Առանցքային բառեր. միապարամետրական կրոնեկերյան մատրիցներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, մատրիցների հետքեր և որոշիչներ, սեփական արժեքներ-ֆունկցիաներ, սինգուլյար արժեքներ-ֆունկցիաներ, տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներ:

**S.H. SIMONYAN, A.V. MELIKYAN, M.G. KHACHATRYAN,
K.G. MKRTCHYAN**

ALGORITHMIZATION AND SOFTWARE FOR DETERMINING SOME CHARACTERISTICS OF ONE-PARAMETER KRONECKER MATRIXES

The issues on algorithmization and software for determining some characteristics (traces and matrix determinants, eigenvalues-functions and singular values-functions) of one-parameter kronecker matrixes are considered. In all cases, differential transformations served as the main mathematical apparatus, which makes it possible to obtain simple recurrent computational procedures that are easily implemented by means of modern information technologies. The software tools were implemented in the object-oriented Python language.

Keywords: one-parametric kronecker matrixes, differential transformations, traces and matrix determinants, eigenvalues-functions, singular values-functions, modern means of information technologies.