

А.В. ЭЛОЯН

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ КУСОЧНО–ОДНОРОДНОЙ
ПЛАСТИНКИ
(Гюмри)**

Определяются оптимальные параметры расположения поперечных опор по длине прямоугольной ортотропной кусочно–однородной пластинки, когда пластинка между опорами и вне опор изготовлена из ортотропных материалов с различными характеристиками упругости, обеспечивающими наименьшие значения максимального прогиба пластинки.

Ключевые слова: композиционный материал, пластинка, прогиб, оптимальное проектирование.

Введение. Тонкостенные конструкции, состоящие из тонких стержней, пластинок и оболочек, имеют широкое применение в современном строительном деле, машиностроении, судостроении, самолетостроении и в других областях современной техники.

В современных конструкциях большое практическое применение имеют упругие изотропные и анизотропные пластинки, находящиеся под произвольной распределенной нагрузкой. В области исследования прочности и устойчивости прямоугольной пластинки следует отметить работы Амбарцумяна С.А. [1], Тимошенко С.П. и др. В области оптимального проектирования тонкостенных элементов конструкций, а именно - в задачах изгиба пластинки, недостаточно исследованы вопросы определения оптимального расположения опор. Эти вопросы рассмотрены в работах Гнуни В.Ц., Белубеяна М.В. и Элояна А.В. [2].

При воздействии нормальных распределенных нагрузок на прямоугольную пластинку ставится задача оптимального выбора параметра c , характеризующего расположение поперечных опор по длине пластинки, обеспечивающего наименьшее значение наибольшего прогиба пластинки.

Постановка задачи. Рассматривается задача определения оптимального расположения опор упругой анизотропной пластинки при изгибе, обеспечивающего наименьшее значение наибольшего прогиба пластинки.

Пусть прямоугольная пластинка размерами a, b, h отнесена к ортогональной прямоугольной системе координат $Oxyz$ так, что плоскость $z = 0$ совпа-

дает со срединной плоскостью пластинки. Опоры по длине пластинки расположены на расстоянии c от середины пластинки (рис.).

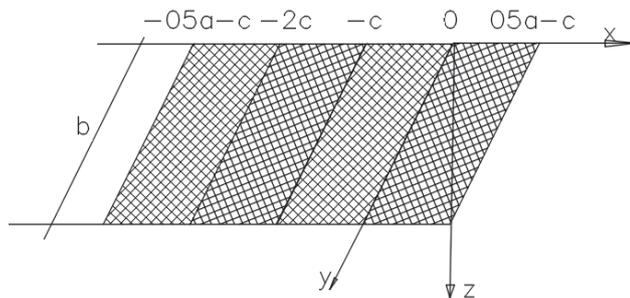


Рис. Расчетная схема изотропной пластинки

Угол укладки монослоев по толщине пластинки φ меняется в отрезке $[-(0,5a + c); 0,5a - c]$ по кусочно-постоянному закону. Жесткость на изгиб ортотропной пластинки:

$$D_{ij}^{(k)} = \frac{h^3 B_{ij}^{(k)}}{12} = \begin{cases} D_{ij}^{(2)} & \text{при } x \in [-(0,5a + c); -2c], \\ D_{ij}^{(1)} & \text{при } x \in (-2c, 0) \\ D_{ij}^{(2)} & \text{при } x \in (0, 0,5a - c) \end{cases} \quad (1)$$

Если нормальная нагрузка $q(x, y)$ постоянна по длине пластинки или распределена симметрично по отношению к середине пластинки ($x = -c$), то в задаче изгиба можно рассматривать лишь половину пластинки $x \in [-c; 0,5a - c]$ с обеспечением в точке $x = -c$ условий симметрии:

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=-c} = 0, \quad \tilde{T}_{13}^{(1)}(-c, y) = 0, \quad (2)$$

где $w(x, y)$ - прогиб; $\tilde{T}_{13}^{(1)}$ - обобщенное поперечное усилие.

Уравнение изгиба пластинки представляется в виде [2]

$$D_{11}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12}^{(k)} + 2D_{66}^{(k)}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (3)$$

где $k = 1$ при $x \in [-c; 0]$, $k = 2$ при $x \in [0; 0,5a - c]$.

Пусть края $y = 0, y = b$ пластинки шарнирно оперты,

$$w_k(x, 0) = 0, M_{22}^{(k)} = D_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial w_k}{\partial x^2} \right) + D_{22}^{(k)} \left(\frac{\partial w_k}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (4)$$

$$w_x = \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}(x) \sin(\mu_n y), q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) \sin(\mu_n y), \mu_n = n\pi/b. \quad (5)$$

Тогда представлением тождественно удовлетворяются условия (4), и из уравнения (3) для определения искомого $w_{kn}(x, y)$ получим

$$B_{11}^{(k)} w_{ik}^{IV} - 2(B_{12}^{(k)} + 2B_{66}^{(k)}) \mu_n^2 w_{kn}^{II} + B_{22}^{(k)} \mu_n^2 w_{kn} = 12q_n / h^3 \mu_n^2 B_{11}^{(0)}. \quad (6)$$

Как показывают вычисления, для известных ортотропных материалов, собранных из элементарных слоев ортотропного композиционного материала, уложенных поочередно под углами $\pm \varphi$ по толщине, имеем [1]

$$\bar{B}_{11} \bar{B}_{22} - (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66})^2 > 0. \quad (7)$$

$$w_{kn} = 12q_0 \left[1 + (A_{kn} \cos t_k \mu_n x + B_{kn} \sin t_k \mu_n x) ch \mu_n s_k x + (C_{kn} \cos t_k \mu_n x + D_{kn} \sin t_k \mu_n x) sh \mu_n s_k x \right] / \mu_n^4 h^3. \quad (8)$$

Следовательно, решение уравнения (6) имеет вид

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_3^{(k)}}{B_{11}^{(k)}} + \sqrt{\left(\frac{B_3^{(k)}}{B_{11}^{(k)}}\right)^2 + \frac{[B_{11}^{(k)} B_{22}^{(k)} - (B_3^{(k)})^2]}{(B_{11}^{(k)})^4}}}, \\ t = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{B_3^{(k)}}{B_{11}^{(k)}} + \sqrt{\left(\frac{B_3^{(k)}}{B_{11}^{(k)}}\right)^2 + \frac{[B_{11}^{(k)} B_{22}^{(k)} - (B_3^{(k)})^2]}{(B_{11}^{(k)})^4}}}, \quad \text{где } k=1, n=1, 2, 3.$$

Искомые функции $w_{kn}(x, y)$ должны удовлетворять восьми условиям: в точке $x = -c$ - условиям симметрии, в точке $x = 0$ - условиям сопряжения и в точке $x = 0.5a - c$ - условиям свободного края;

$$w_{1n}^I|_{x=-c} = 0, \quad w_{1n}^{III}|_{x=-c} = 0, \\ w_{1n}(0) = w_{2n}(0) = 0, \quad w_{1n}^I(x) = w_{2n}^I(x), \\ |M_{1n}^{(1)}(0) = M_{2n}^{(2)}(0) \Rightarrow w_{1n}^{II}(x) = w_{2n}^{II}(x), \\ \tilde{T}_{13n}^{(2)}(0.5a - c) = 0 \Rightarrow (B_{11}^{(2)} w_{2n}^{II} - B_{11}^{(2)} \mu_n^2 w_{2n})_{x=0.5a-c} = 0, \\ M_{11n}^{(2)}(0.5a - c) = 0 \Rightarrow (B_{11}^{(2)} w_{2n}^{III} - (B_{12}^{(2)} + 4B_{66}^{(2)}) w_{2n}^I)_{x=0.5a-c} = 0. \quad (9)$$

Из восьми условий (9) определяются искомые постоянных $A_{kn}, B_{kn}, C_{kn}, D_{kn}, (k=1,2)$, входящих в (8).

Рассмотрим случай, когда пластинка изготовлена из элементарных ортотропных слоев боропластика со следующими характеристиками в главных геометрических направлениях:

$$\bar{B}_0^{11} = 1, \bar{B}_0^{12} = 0.025, \bar{B}_0^{13} = 0.0062, \bar{B}_0^{66} = 0.012d$$

Элементарные слои композиционного материала по толщине пластинки поочередно уложены под углами $\pm \varphi_1$ при $x \in [-c; 0]$ между опорами, а за опорами - под углами $\pm \varphi_2$ при $x \in (0, 5a - c]$, тогда формулами поворота [3].

Имея значение прогиба пластинки $w = w(x, y, \alpha)$, можно рассмотреть следующую оптимизационную задачу: найти

$$w^* = \min, \max w_k(x, y, \alpha), \quad (10)$$

$$\alpha, x, y$$

где $-c \leq x \leq 0, 5a - c, 0 \leq y \leq b, 0 \leq \alpha \leq 0,5$, при заданных характеристиках ортотропных композиционных материалов в областях $[-c; 0] (0; 0,5a - c]$;

при $q(x, y) = q_0 \sin(\mu_i y), \quad \mu_i = \pi / b, \quad w = w_k \sin(\mu_i y)$
 $\max w_k(x, y) = w_k(x, 0,5b).$

В этом случае задача оптимизации пластинки (10) окончательно приводится: найти

$$w^* = \min(\min_{\phi_1, \phi_2} \max_{\alpha, k, x} w_{k1}(x, 0,5b, \alpha, \phi_1, \phi_2)) \quad (11)$$

при ограничениях $\phi_i \in [0; 90^\circ], \quad i = 1,2 \quad \alpha \in [0; 0,5], \quad k = 1 \quad \text{если } x \in [-c; 0],$
 и $k = 2, \quad \text{если } x \in [0; 0,5a - c].$

Результаты решения оптимизационной задачи (11) для пластинок из композиционных материалов приведены в таблице.

В таблице приведены наилучшие и наихудшие значения углов укладки элементарных слоев ортотропного композиционного материала по толщине пластинки при $\alpha = \alpha^*$.

Как показывают проведенные расчеты, для пластинок, изготовленных по двум вариантам ортотропных композиционных материалов, наилучшими углами укладки элементарных слоев по толщине пластинки являются соответственно углы укладки между опорами и за опорами: $\phi_1^* = 45^\circ, \phi_2^* = 90^\circ$.

Безразмерные значения углов укладки

| м/λ | | 1/3 | 1/2 | 2/3 | 1 | 2 |
|--------------|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| бораллюминий | w^* | $w^*=0.059$ | $w^*=0.118$ | $w^*=0.133$ | $w^*=0.145$ | $w^*=0.168$ |
| | φ_1^* | $\varphi_1^*=45^0$ | $\varphi_1^*=45^0$ | $\varphi_1^*=45^0$ | $\varphi_1^*=45^0$ | $\varphi_1^*=45^0$ |
| | φ_2^* | $\varphi_2^*=90^0$ | $\varphi_2^*=90^0$ | $\varphi_2^*=90^0$ | $\varphi_2^*=90^0$ | $\varphi_2^*=90^0$ |
| | α^* | $\alpha^*=0.26$ | $\alpha^*=0.19$ | $\alpha^*=0.15$ | $\alpha^*=0.11$ | $\alpha^*=0.19$ |
| | w^* | $w^*=0.122$ | $w^*=0.211$ | $w^*=0.295$ | $w^*=0.393$ | $w^*=0.422$ |
| | φ_1^* | $\varphi_1^*=90^0$ | $\varphi_1^*=90^0$ | $\varphi_1^*=90^0$ | $\varphi_1^*=90^0$ | $\varphi_1^*=90^0$ |
| | φ_2^* | $\varphi_2^*=45^0$ | $\varphi_2^*=45^0$ | $\varphi_2^*=45^0$ | $\varphi_2^*=45^0$ | $\varphi_2^*=45^0$ |
| | α^* | $\alpha^*=0.38$ | $\alpha^*=0.35$ | $\alpha^*=0.31$ | $\alpha^*=0.25$ | $\alpha^*=0.18$ |

Наихудшими углами укладки являются:

$\varphi_{1*} = 90^0$ для рассмотренных вариантов композиционных материалов, причем φ_{2*} уменьшается с увеличением $\lambda \in [1/3; 2]$.

Использование композиционных материалов для изготовления пластинок с кусочно-постоянными углами укладки (φ_1, φ_2) приводит к существенному уменьшению наибольшего по координатам, наименьшего по расположению опор (оптимальное расположение) прогиба пластинки.

Например, для пластинки из углепластика:

при $\lambda = 1/3$:

$$\max \min \max W_k^-(x, y, \alpha, \varphi_1, \varphi_2)$$

$$\frac{W_*}{W^*} = \frac{\varphi_1, \varphi_2}{\min} \frac{\alpha}{\min} \frac{k, x, y}{\max(z, y, \alpha, \varphi_1, \varphi_2)} = \frac{0,122}{0.059} = 2.1;$$

при $\lambda = 1$:

$$\frac{W_*}{W^*} = \frac{\varphi_1, \varphi_2}{\min} \frac{\alpha}{\min} \frac{k, x, y}{\max(z, y, \alpha, \varphi_1, \varphi_2)} = \frac{0,393}{0.145} = 2,7;$$

при $\lambda = 2$:

$$\frac{W_*}{W^*} = \frac{\varphi_1, \varphi_2}{\min} \frac{\alpha}{\min} \frac{k, x, y}{\max(z, y, \alpha, \varphi_1, \varphi_2)} = \frac{0.422}{0.168} = 2.5.$$

Таким образом, существенное уменьшение (в несколько раз) наибольшего прогиба пластинок очевидно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Амбарцумян С.А.** Теория анизотропных пластинок. - М.: Физматгиз, 1962.-384с.
2. **Элоян А.В.** Оптимальное проектирование прямоугольной пластинки при изгибе// НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ СЕГОДНЯ: НАУЧНО–ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. – ISSN.- 2020.- N:3(50).-С. 8-12.
3. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. -М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.

Ա.Վ. ԷԼՈՅԱՆ

ՈՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿՏՈՐԱՀԱՄԱՍԵՌ ԹԻԹԵՂԻԿԻ ԾՈՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ

Որոշվում են սալի լայնական հենարանների և կոմպոզիտ մոնոշերտերի դասավորման օպտիմալ պարամետրերը ուղղանկյուն սալի երկարությամբ, երբ սալի հենարանների միջև և հենարաններից դուրս օրտոտրոպ նյութը պատրաստված է տարբեր առաձգականությամբ բնութագրերով, որոնք ապահովում են առավելագույն ճկվածքի ամենափոքր արժեքը:
Առանցքային բառեր. կոմպոզիտան նյութ, սալ, ճկվածք, օպտիմալ նախագծում:

A.V. ELOYAN

OPTIMAL DESIGN IN THE BENDING PROBLEM OF THE SECTIONALLY-UNIFORM RECTANGULAR PLATE

Identification of optimal parameters for the transverse distance of support of rectangular plates, when the plate section between or outside the supports is made of orthotropic material of different elasticity modes, which provides less value of plates bending are determined.

Keywords: compassion material, plates, bending, optimal location.

ՀՏԴ 691.32

Վ.Ա. ԲԱԼԱՅԱՆ, Ս.Ա. ԿՈՈՅԱՆ, Ա.Վ. ԲԱԼԱՅԱՆ

ԻՆՔՆԱԽՏԱՑՎՈՂ ԲԵՏՈՆՆԵՐ. ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԸ, ՏԵԽՆՈԼՈԳԻԱՆ (Վանաձոր)

Դիտարկված են հանքային և քիմիական հավելումների ազդման հարցերը բետոնային խառնուրդների կազմերի բաղադրագրական բաղադրիչների ակտիվացման և բարձրացված ֆիզիկամեխանիկական հատկություններով բարեփոխված բետոնների ստացման դեպքում: Հիմնվելով կատարված հետազոտությունների արդյունքների վրա՝ դիտարկված են ինքնախտացվող բետոնային խառնուրդների կիրառման հեռանկարները, ներկայացվել են դրանց հատկություններն ըստ առավելությունների՝ սովորական բետոններին