УДК 681.616.063

**О.С. АБГАРЯН, С.О. СИМОНЯН, А.Г. АВЕТИСЯН,
М.Г. ЧИЛИНГАРЯН, А.В. МЕЛИКЯН**

ОБ АВТОМАТИЗИРОВАННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ МУРА-ПЕНРОУЗА

Представлены математические модели ряда методов по определению однопараметрических обобщенных обратных матриц, основанных на блочно-матричных структурах, позволяющие легко организовать численно-аналитические процедуры с применением дифференциальных преобразований.

Ключевые слова: однопараметрическая обобщенная обратная матрица Мура-Пенроуза, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, численно-аналитическое решение.

Введение. Матрицы $A(t)_{mxn}$ с однопараметрическими элементами довольно часто встречаются при решении систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, вычислении сингулярных дифференциальных уравнений, в краевых задачах, при решении систем функциональных уравнений, использовании стохастических матриц и марковских цепей, исследовании поведения динамических систем, решении различных задач систем управления, параметрических задач линейного программирования и многих других задач.

По аналогии с числовыми матрицами, для обобщенной обратной матрицы $A^+(t)_{nxm}$ будут иметь место условия Мура-Пенроуза:

$$A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t) = A(t), \tag{1}$$

$$A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) = A^+(t) , \tag{2}$$

$$[A(t) \cdot A^+(t)]^* = A(t) \cdot A^+(t) , \tag{3}$$

$$[A^+(t) \cdot A(t)]^* = A^+(t) \cdot A(t), \tag{4}$$

где “+” - знак обобщенной обратной матрицы, а “*” - знак комплексного сопряжения.

В настоящей работе представлены численно-аналитические методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц, при которых основным математическим аппаратом выступают дифференциальные преобразования [1].

Постановка задачи и методы исследования. Пусть имеется матрица $A(t)_{mxn}$, для которой $A(t) \in C^{mxn}$.

1. При недоопределенных матрицах $A(t)_{mxn}$, $m \leq n$ с использованием (1) или (2) условий Мура-Пенроуза приходим к декомпозиционной математической модели [2]:

$$A(t)_{mxn} = A_1(t)_{mxn} + j \cdot A_2(t)_{mxn},$$

$$B_1(t)_{mxm} = A_1(t) \cdot A_1^T(t) + A_2(t) \cdot A_2^T(t),$$

$$B_2(t)_{mxm} = A_2(t) \cdot A_1^T(t) - A_1(t) \cdot A_2^T(t),$$

$$A^+(t)_{nxm} = A^*(t)_{nxm} \cdot [A(t) \cdot A^*(t)]^+{}_{mxm},$$

$$[A(t) \cdot A^*(t)] = B_1(t) + j \cdot B_2(t),$$

$$[A(t) \cdot A^*(t)]^+ = [B_1(t) + j \cdot B_2(t)]^+ = [X_1(t) + j \cdot X_2(t)]_{mxm},$$

$$\underset{2mx2m}{\left[\begin{array}{c:c} B_1(t) & -B_2(t) \\ \hdashline B_2(t) & B_1(t) \end{array}\right]} \cdot \underset{2mx2m}{\left[\begin{array}{c:c} X_1(t) & -X_2(t) \\ \hdashline X_2(t) & X_1(t) \end{array}\right]} = E_{2mx\,2m}, \tag{5}$$

$$\underset{2mx2m}{\left[\begin{array}{c:c} X_1(t) & -X_2(t) \\ \hdashline X_2(t) & X_1(t) \end{array}\right]} = \underset{2mx2m}{\left[\begin{array}{c:c} B_1(t) & -B_2(t) \\ \hdashline B_2(t) & B_1(t) \end{array}\right]^+} = \underset{2mx2m}{\left[\begin{array}{c:c} B_1(t) & -B_2(t) \\ \hdashline B_2(t) & B_1(t) \end{array}\right]^{-1}},$$

$$A^+(t)_{nxm} = A^*(t)_{nxm} \cdot [X_1(t) + j \cdot X_2(t)]_{mxm}.$$

2. При переопределенных матрицах $A(t)_{mxn}$, $m > n$ с использованием (1) или (2) условий Мура-Пенроуза приходим к декомпозиционной математической модели [3]:

$$A(t)_{mxn} = A_1(t)_{mxn} + j \cdot A_2(t)_{mxn},$$

$$C_1(t)_{nxn} = A_1^T(t) \cdot A_1(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t),$$

$$C_2(t)_{nxn} = A_1^T(t) \cdot A_2(t) - A_2^T(t) \cdot A_1(t),$$

$$A^{+}(t)_{nxm} = [A^{*}(t) \cdot A(t)]^{+}_{nxn} \cdot A^{*}(t)_{nxm},$$

$$[A^{*}(t) \cdot A(t)] = C_1(t) + j \cdot C_2(t),$$

$$[A^{*}(t) \cdot A(t)]^{+} = [C_1(t) + j \cdot C_2(t)]^{+} = [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)]_{nxn},$$

$$\underset{2nx2n}{\left[\begin{array}{c:c} C_1(t) & -C_2(t) \\ \hdashline C_2(t) & C_1(t) \end{array}\right]} \cdot \underset{2nx2n}{\left[\begin{array}{c:c} Y_1(t) & -Y_2(t) \\ \hdashline Y_2(t) & Y_1(t) \end{array}\right]} = E_{2nx2n}, \tag{6}$$

$$\underset{2nx2n}{\left[\begin{array}{c:c} Y_1(t) & -Y_2(t) \\ \hdashline Y_2(t) & Y_1(t) \end{array}\right]} = \underset{2nx2n}{\left[\begin{array}{c:c} C_1(t) & -C_2(t) \\ \hdashline C_2(t) & C_1(t) \end{array}\right]^{+}} = \underset{2nx2n}{\left[\begin{array}{c:c} C_1(t) & -C_2(t) \\ \hdashline C_2(t) & C_1(t) \end{array}\right]^{-1}},$$

$$A^{+}(t)_{nxm} = [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)]_{nxn} \cdot A^{*}(t)_{nxm}.$$

3. При матрицах $A(t)_{mxn}$ с использованием (3) условия Мура-Пенроуза приходим к декомпозиционной математической модели [4]:

$$A(t)_{mxn} = A_1(t)_{mxn} + j \cdot A_2(t)_{mxn},$$

$$A^{+}(t)_{nxm} = X_1(t)_{nxm} + j \cdot X_2(t)_{nxm},$$

$$[A(t) \cdot A^{+}(t)]^{*} \cdot A(t) = A(t) \cdot A^{+}(t) \cdot A(t) = A(t),$$

$$\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hdashline -X_2^T(t) & -X_1^T(t) \end{array}\right]} \cdot \underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & -A_1^T(t) \end{array}\right]} = E_{2mx2m}, \tag{7}$$

$$\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hdashline -X_2^T(t) & -X_1^T(t) \end{array}\right]} = \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & -A_1^T(t) \end{array}\right]^{+}}.$$

4. При матрицах $A(t)_{mxn}$ с использованием (4) условия Мура-Пенроуза приходим к декомпозиционной математической модели [5]:

$$A(t)_{mxn} = A_1(t)_{mxn} + j \cdot A_2(t)_{mxn},$$

$$A^{+}(t)_{nxm} = X_1(t)_{nxm} + j \cdot X_2(t)_{nxm},$$

1) $A(t) \cdot [A(t) \cdot A^{+}(t)]^{*} = A(t) \cdot A^{+}(t) \cdot A(t) = A(t),$

$$\underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right]} \cdot \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]} = E_{2nx2n}, \tag{8}$$

$$\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]} = \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right]^{+}} \cdot E_{2nx2n}.$$

2) $[A^+(t) \cdot A(t)]^* \cdot A^+(t) = A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) = A^+(t)$,

а) $$\underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right]} \cdot \underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c} X_1^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) \end{array}\right]} = \underset{2nxn}{\left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0 \end{array}\right]}, \tag{9а}$$

$$\underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c} X_1^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) \end{array}\right]} = \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right]^{+}} \cdot \underset{2nxn}{\left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0 \end{array}\right]},$$

б) $$\underset{nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \end{array}\right]} \cdot \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & X_2^T(t) \\ \hdashline -X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]} = \underset{nx2n}{\left[\begin{array}{c:c} E & 0 \end{array}\right]}, \tag{9б}$$

$$\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & X_2^T(t) \\ \hdashline -X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]} = \underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \end{array}\right]^{+}} \cdot \underset{nx2n}{\left[\begin{array}{c:c} E & 0 \end{array}\right]}.$$

Замечание 1. Представления (5) - (8), (9а), (9б) дают возможность при приведении их из области оригиналов в область дифференциальных преобразований организовать простые рекуррентные вычислительные схемы по определению соответствующих матричных дискрет и восстановлению однопараметрических обобщенных обратных матриц в соответствии с некоторыми обратными дифференциальными преобразованиями [1].

Замечание 2. На основе использования представлений (5) и (6) в работах [6] и [7] были разработаны программные средства на основе дифференциальных преобразований и с применением языка Python [8], обладающие доброкачественными вычислительными характеристиками. Аналогичные программы будут разработаны и при представлениях (7), (8), (9а), (9б) [4, 5].

Замечание 3. В работе [2] были предложены также пять итерационных вычислительных схем по определению неизвестных матричных дискрет, а в работе [3] – две итерационные вычислительные схемы. Вопросы сходимости этих вычислительных схем будут рассмотрены в других научных работах.

Заключение. В настоящей работе предложены математические модели ряда методов определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза. Численно-аналитические вычислительные схемы легко реализуемы применением дифференциальных преобразований средствами современных информационных технологий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.- Киев: Наукова думка, 1984. - 419с.
2. **Симонян С.О., Чилингарян М.Г., Абгарян О.С.** Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (I) // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2023. - № 2. – С. 9 - 21. https://doi.org/10.53297/18293336-2023.2-9
3. **Симонян С.О., Чилингарян М.Г., Абгарян О.С.** Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (II) // Известия НАН РА и НПУА. Серия технических наук. – 2023. - № 4. – С. 514 - 524. https://doi.org/10.53297/0002306X-2023.v76.4-514
4. **Simonyan S.H., Avetisyan A.G., Abgaryan H.S.** Definition of Complex One-Parameter Generalized Moore-Penrose Inverses Using Differential Transformations (I) // Computational and Mathematical Methods. – 2025.
5. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Абгарян О.С.** К определению комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (II) // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2025. - № 1.
6. **Simonyan S.H., Melikyan A.V., Abgaryan H.S.** Software implementation of decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices (I) // Proceedings of NPUA: Information Technologies, Electronics, Radio Engineering. – 2024. - № 1. – P. 9 – 19. https://doi.org/10.53297/18293336-2024.1-9

7. **Simonyan S.H., Melikyan A.V., Abgaryan H.S.** Software implementation of decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices (II) // Proceedings of NPUA: Information Technologies, Electronics, Radio Engineering. – 2024. - № 2. – P. 9 – 20.
8. **Kong Q., Siauw T., Bayen A.** Python Programming and Numerical Methods. A Guide for Engineers and Scientists. - Academic Press, 2021. - 455p.

Հ.Ս. ԱԲԳԱՐՅԱՆ, Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ա.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Մ.Գ. ՉԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ, Ա.Վ. ՄԵԼԻՔՅԱՆ

ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՈՒԶԻ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՎԱԾ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ներկայացված են միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման մի շարք մեթոդների մաթեմատիկական մոդելներ՝ հիմնված բլոկ-մատրիցային կառուցվածքների վրա, որոնք թույլ են տալիս հեշտությամբ կազմակերպել թվա-անալիտիկ ընթացակարգերը՝ դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ:

Առանցքային բառեր. Մուր-Պենրոուզի միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրից, անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, թվա-անալիտիկ լուծում:

H.S. ABGARYAN, S.H. SIMONYAN, A.G. AVETISYAN, M.G. CHILINGARYAN, A.V. MELIKYAN

THE AUTOMATED DETERMINATION OF ONE-PARAMETER GENERALIZED INVERSE MOORE-PENROSE MATRICES

Mathematical models of a number of methods for determining one-parameter generalized inverse matrices based on block-matrix structures and allowing easy organization of numerical-analytical procedures using differential transformations are presented.

Keywords: one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrix, analytical solution, differential transformations, numerical-analytical solution.