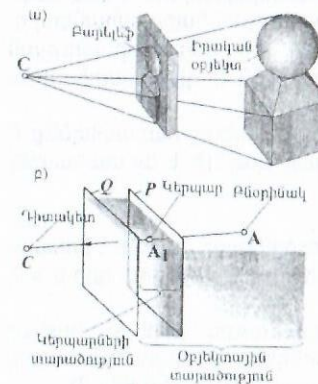


ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԳԾԱՅԻՆ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ ԵՐԿՐՈՒ ՋՈՒԿԱՅԵՌ  
ՅԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՍԱՅՄԱՆԱՓՎԱԿԱԾ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Կ. Սողոմոնյան, Կ. Թունանյան, Ջ. Դալլաքյան

Ներկայումս օբյեկտային կողմնորոշմամբ գրաֆիկական համակարգերում հիմնականում լուծված են օբյեկտների երկրաչափական և գուներանգային մոդելավորման, ինչպես նաև մոդելների իզոմետրիկ ձևափոխման խնդիրները: Լուծված չեն տարածության պրոյեկտիվ (կոլիմետր) ձևափոխությունների իրականացման խնդիրները: Սրա հետ կապված, մասնավորապես լուծված չէ այն խնդիրը, որը թույլ կտար անսահմանափակ տարածությունը պատկերել նախապես առաջադրված որևէ սահմանափակ տիրույթում: Այս խնդիրն ունի գործնական նշանակություն բարեյեֆների, գորեյեֆների, դեկորացիաների և այլ ռելիեֆային (տարածական) մոդելների նախագծման ավտոմատացված համակարգերի ստեղծման գործում:

Աշխատանքը նվիրված է իրական օբյեկտների ռելիեֆային պատկերների երկրաչափական մոդելավորման ալգորիթմների մշակմանը և մոդելների կառուցման գործընթացի ավտոմատացմանը:



Նկ. 1.

Մասնավորապես տվյալ հոդվածում դիտարկվում է իրար զուգահեռ երկու հարթություններով սահմանափակված շերտում տարածության ռելիեֆային հեռանկարի կառուցման խնդիրը, որի լուծման արդյունքում ստացված ալգորիթմների հիման վրա մշակվել է իրական օբյեկտների բարեյեֆների ավտոմատացված մոդելավորման տեխնոլոգիա (տես նկ. 1.ա):

Ռելիեֆային հեռանկարի կառուցման համար եռաչափ տարածության մեջ առաջադրենք երկու՝  $P$  և  $Q$  զուգահեռ հարթությունները և  $C$  կետը՝ որպես դիտակետ (նկ. 2.բ): Բնօրինակները դասավորում ենք  $Q$  հարթությունից աջ դասավորված կիսատարածության սահմաններում, որը կանվանենք օբյեկտային տարածություն, իսկ դրանց կերպարները (ռելիեֆային հեռանկարները) պետք է տեղավորվեն  $P$  և  $Q$  հարթություններով սահմանափակված շերտի մեջ, որը կկոչվի կերպարների տարածություն: Խնդիր է դրվում ստանալ այն օրենքը (կանոնը), որը կապ է հաստատում օբյեկտային տարածության կետերի ( $A$ ) և նրաց համապատասխան կերպարների ( $A_1$ ) միջև: Այ կերպ ասած, անհրաժեշտ է ունենալ այն ձևափոխությունը, որը փոխմիարժեք համապատասխանություն է հաստատում օբյեկտային տարածության և կերպարների տարածության կետերի միջև (օբյեկտային ողջ տարածությունն արտապատկերում է  $P$  և  $Q$  հարթություններով սահմանափակված կերպարների տարածության վրա):

Դրված խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ ձևափոխությունը պետք է բավարարի հետևյալ պայմաններին

ա) Օբյեկտային տարածության անհսկական կետերի բազմությունը պետք է համապատասխանության մեջ դրվի կերպարների տարածության սահմանը հանդիսացող  $P$  հարթության կետերի բազմության հետ, իսկ  $Q$  հարթության կետերը պետք է մնան անշարժ:

բ) Չևափոխության ինվարիանտներ պետք է լինեն անընդհատությունն ու ուղղագծությունը:

Ինչպես հայտնի է, այս երկու պայմաններին բավարարող ձևափոխությունը տարածության պրոյեկտիվ ձևափոխությունն է, որն ընդհանուր դեպքում համասեռ դեկարտյան կոորդինատների օգնությամբ ներկայացվում է հետևյալ հավասարումների տեսքով՝

$$\begin{cases} X_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1 U \\ Y_1 = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + d_2 U \\ Z_1 = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + d_3 U \\ U_1 = a_4 X + b_4 Y + c_4 Z + d_4 U \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad (1)$$

որտեղ  $\Delta \neq 0$  դրանց որոշիչն է: Եկատենք, որ պրոյեկտիվ ձևափոխությունը կլինի փոխմիարժեք, եթե  $\Delta \neq 0$ : Այս պայմանի դեպքում կապահանջվի նաև երկրաչափական օբյեկտների անընդհատությունը և ուղղագծությունը, իսկ տարածության անհսկական հարթությունը համապատասխանության մեջ կդրվի սովորական հարթության հետ:  $\Delta = 0$  դեպքում ստացվում է ձևափոխության այն մասնավոր տարբերակը, որը ողջ եռաչափ տարածությունն արտապատկերում է մեկ հարթության վրա, և որի արդյունքում կառուցվում է տարածության հարթ հեռանկարը:

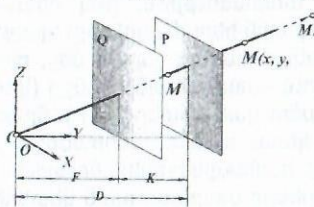
Ռելիեֆային հեռանկարների կառուցման համար  $\Delta \neq 0$ , իսկ տարածության յուրաքանչյուր կետը և նրա կերպարը պետք է դասավորվեն  $C$  դիտակետից դուրս եկող ճառագայթի վրա:

Եթե դեկարտյան կոորդինատային համակարգի սկզբնակետը համատեղենք  $C$  դիտակետի հետ, ապա վերոհիշյալ վերջին պայմանը կարելի է արտահայտել հետևյալ հավասարումներով՝

$$x_1 : y_1 : z_1 = x : y : z \quad (2)$$

Այսպիսով, ռելիեֆային հեռանկարի կառուցման գործընթացը կարելի է իրականացնել տարածության այնպիսի պրոյեկտիվ ձևափոխության միջոցով, որի  $\Delta \neq 0$ , և տեղի ունի (2) պայմանը:

Որոնելի ձևափոխության անալիտիկ բանաձևերը դուրս բերելու համար դեկարտյան կոորդինատների սկզբնակետը համատեղենք  $C$  դիտակետի հետ, իսկ  $Y$  առանցքը դասավորենք ուղղահայաց  $Q$  և  $P$  հարթություններին (նկ. 2):



Նկ. 2.

Դիտարկենք տարածության կամայական  $M(x, y, z)$  կետը: Այս կետի  $M_1$  կերպարը պետք է դասավորվի  $Q$  և  $P$  հարթությունների միջև և գտնվի դիտակետով անցնող  $CM$  ճառագայթի վրա:  $CM$  ճառագայթի կետերը, ինչպես նաև նրա  $M_\infty$  անհսկական կետը, կարելի է նկարագրել համասեռ  $(x, y, z, U)$  կոորդինատների օգնությամբ: Դրանց ոչ համասեռ կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$X = \frac{x}{U}; \quad Y = \frac{y}{U}; \quad Z = \frac{z}{U} \quad (3)$$

որտեղ  $U$  - ն դիտվում է որպես պարամետր և փոփոխվում է  $0 \dots \infty$ : Նրա 0 արժեքի դեպքում որոշվում է  $CM$  ճառագայթի  $M_\infty$  անհսկական կետը, իսկ  $\infty$  արժեքի դեպքում  $C$  սկզբնակետը: Իսկ  $M_1$  կերպարը թող որոշվի  $U_1$  պարամետրի օգնությամբ, որը ևս կարող է փոփոխվել  $0 \dots \infty$ :

$M$  և  $M_1$  կետերի միջև որոնելի համապատասխանությունը կարելի է հաստատել՝ առաջադրելով  $U$  և  $U_1$  պարամետրերի միջև կապ հաստատող  $U_1 = f(U)$  ֆունկցիան: Չևափոխության գծայնությունն ապահովելու համար այդ ֆունկցիան փնտրում ենք

$$U_1 = mU + n \quad (4)$$

տեսքով: Ֆունկցիայի  $m$  և  $n$  գործակիցները որոշելու համար օգտագործենք ռելիեֆային հեռանկարի ստացման համար անհրաժեշտ նախապայմանները: Ռելիեֆի շերտի սահմանային  $P$  հարթության հեռավորությունը  $C$  դիտակետից նշանակենք  $D$ , շերտի հաստությունը՝  $K$  (տես նկ. 2): Անշարժ կետերի  $Q$  հարթության հեռավորությունը դիտակետից կլինի՝  $F = D - K$ :

Տրածության բոլոր անհսկական կետերի ( $U = 0$ ) կերպարները պետք է դասավորվեն  $Q$  հարթության մեջ, այսինքն՝  $U = 0$  - ի դեպքում  $Y_1 = D$ , ուստի (3) և (4) - ից ստանում ենք՝

$$U_1 = \frac{Y_1}{D}; \quad n = \frac{Y_1}{D} \quad (5)$$

Եթե կետը դասավորված է  $Q$  հարթության մեջ՝ ապա նրա կերպարը համընկնում է այդ կետի հետ: Այս պայմանից ստանում ենք՝

$$m = \frac{K}{D} :$$

$m$  և  $n$  գործակիցների արժեքները տեղադրելով (4) - ի մեջ ստանում ենք որոնելի ֆունկցիայի վերջնական տեսքը՝

$$DU_1 = KU + Y_1 : \quad (6)$$

(3), (5) և (6) - ից ստանում ենք որոնելի ձևափոխության հետևյալ անալիտիկ բանաձևերը՝ արտահայտված դեկարտյան կոորդինատներով.

$$\begin{cases} X_1 = \frac{DX}{Y_1 + K} \\ Y_1 = \frac{DY}{Y_1 + K} \\ Z_1 = \frac{DZ}{Y_1 + K} \end{cases} \quad \begin{cases} X = \frac{KX_1}{D - Y_1} \\ Y = \frac{KY_1}{D - Y_1} \\ Z = \frac{KZ_1}{D - Y_1} \end{cases} \quad (7)$$

(7) հավասարումներից բխում է, որ կերպարների  $Y_1$  կոորդինատները սահմանափակ մեծություններ են և չեն գերազանցում  $D$  - ին, իրոք՝

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} Y_1 = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{DK}{Y + K} = D$$

Սա նշանակում է, որ տարածության ցանկացած օբյեկտի ռելիեֆային հեռանկարն իրոք տեղավորվում է նախապես առաջադրված  $K$  հաստությամբ շերտի մեջ:



тем окружность эпициклов с центрами в точках  $M_1$  и  $M_2$ , касающихся окружности деферента в точках  $D_1$  и  $D_2$  соответственно. Точки пересечения окружностей построенных эпициклов определяют возможные положения второго фокуса  $F_2'$  и  $F_2''$ .

Условие существования точек пересечения:

$$r_1' + r_2' \geq S, \quad (1)$$

где

$$S = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \Delta \nu}$$

— длина отрезка, соединяющего точки  $M_1$  и  $M_2$ , а

$$r_1' = 2a - r_1, \quad r_2' = 2a - r_2 \quad (2)$$

— радиусы построенных окружностей эпициклов.

Из неравенства (1) с учетом (2) получаем

$$a \geq (r_1 + r_2 + s) / 4. \quad (3)$$

Если не выполняется условие (1) или (3), то окружности эпициклов не пересекаются, и поставлена задача решения не имеет.

Проведем отрезки прямых, соединяющих фокусы  $F_2'$  и  $F_2''$  с фокусом  $F_1$  и точкой  $D_1$ . Далее через начальную точку  $M_1$  проведем прямые  $M_1K_1$  и  $M_1K_2$ , перпендикулярные к  $F_2'D_1$  и  $F_2''D_1$ , и затем через их основания  $K_1$  и  $K_2$  проведем средние линии  $K_1C_1$  и  $K_2C_2$

треугольников  $F_1D_1F_2'$  и  $F_1D_1F_2''$ . Отрезки  $K_1C_1$  и  $K_2C_2$  равны, так как являются половинами общей стороны  $F_1D_1 = 2a$  треугольников  $F_1D_1F_2'$  и  $F_1D_1F_2''$ .

Теперь можно построить эксцентры движения с центрами  $C_1$  и  $C_2$  и радиусом  $C_1K_1 = C_2K_2 = a$  и далее эллиптические орбиты вокруг притягивающий центр  $F_1$  с величиной большой полуоси  $a$ , проходящие через заданные точки  $M_1$  и  $M_2$ .

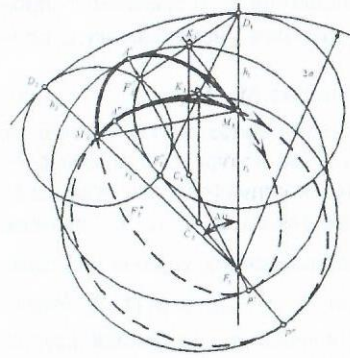


Рис. 1

**2. Гиперболическая орбита.** Предположим, что заданы два положения спутника  $M_1$  и  $M_2$  на гиперболической орбите вокруг притягивающего центра  $F_1$  с величиной действительной полуоси  $a$  (рис. 2). Для определения положения второго фокуса проведем окружности деферента с центром  $F_1$  и радиусом  $2a$  и далее окружностей эпициклов с центрами в точках  $M_1$  и  $M_2$ , касающихся окружности деферента в точках  $D_1$  и  $D_2$  соответственно.

Определим теперь сумму радиусов  $r_1'$  и  $r_2'$  построенных эпициклов:

$$r_1' + r_2' = 2a + r_1 + 2a + r_2 = 4a + r_1 + r_2. \quad (4)$$

Из треугольника  $M_1F_1M_2$  следует, что

$$r_1 + r_2 > S,$$

а затем с учетом (4) получим

$$r_1' + r_2' = 4a + r_1 + r_2 > S.$$

Последнее условие утверждает, что окружности эпициклов всегда пересекаются в двух точках  $F_2'$  и  $F_2''$ , которые определяют возможные положения второго фокуса гиперболических орбит, проходящие через точки  $M_1$  и  $M_2$ .

Построения окружностей эпициклов с центрами  $C_1$  и  $C_2$  и радиусом

$C_1K_1 = C_2K_2 = a$  искомых гиперболических орбит (рис. 2) аналогичны построениям на рис. 1 для эллиптических орбит.

Следует отметить, что ни при каких положениях точек  $M_1$  и  $M_2$  гиперболический сегмент, ограниченный другой траекторией между точками  $M_1$  и  $M_2$ , а также хордой  $M_1M_2$ , не содержит второго фокуса.

**3. Параболическая орбита.** Для того чтобы найти положение директрис параболических орбит, проходящих через точки  $M_1$  и  $M_2$ , построим сначала

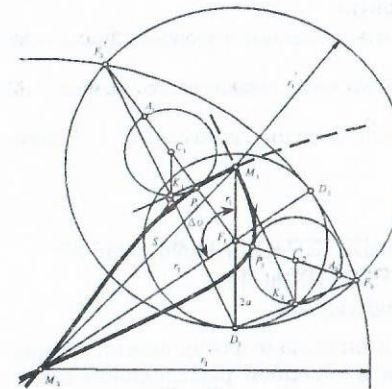


Рис. 2

окружности эпициклов с центрами в точках  $M_1$  и  $M_2$ , радиусы которых равны соответственно  $r_1$  и  $r_2$ . Очевидно, что эти окружности проходят через притягивающий центр  $F_1$ . Известно [1-3], что директриса (деферент) искомой параболической траектории является общей касательной обеих окружностей. Поскольку можно провести две такие касательные, то они определяют две возможные параболические орбиты, которые отличаются направлением обхода притягивающего центра  $F_1$  при движении от точки  $M_1$  к точке  $M_2$ .

Для определения положений осей указанных параболических орбит через притягивающий центр  $F_1$  проведем прямые, перпендикулярные к их директрисам. Для построения вершин  $A_1$  и  $A_2$  параболических орбит сначала соединим притягивающий центр  $F_1$  с точками  $D_1$  и  $D_2$  — точками

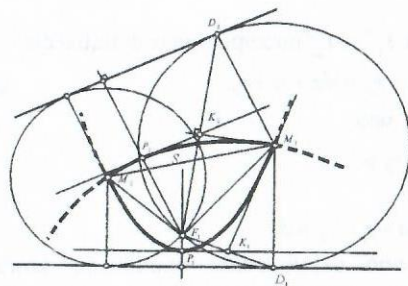


Рис. 3

касания начальной эпицикла с директрисами этих орбит. Далее через начальную точку  $M_1$  проведем прямые  $M_1K_1$  и  $M_1K_2$ , перпендикулярные к прямым  $F_1D_1$  и  $F_1D_2$  соответственно. Затем через точки  $K_1$  и  $K_2$  проведем прямые, параллельные директрисам орбит. Эти прямые будут эксцентрами исследуемых орбит, которые, пересекаясь с соответствующими осями парабол, определяют искомые вершины  $P_1$  и  $P_2$  указанных орбит.

#### Литература

1. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. - М.: Наука, 1965. - 540 с.
2. Охочимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. - М.: Наука, 1990. - 450 с.
3. Адамян В. Г. Альмагест-2. Геометрическая теория гравитации. - Ереван, ГАСПРИНТ, 2004. - 224 с.

## ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОЗИЦИОННЫХ ОТНОШЕНИЙ ФИГУР В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К. Согомоян, Э. Амбарцумян

В основу определения позиционных отношений двух фигур лежит размерность множества их общих точек. Пусть в  $n$ -мерном расширенном евклидовом пространстве  $E^n$  заданы фигуры  $A$  и  $B$ , которые имеют множество общих точек, составляющих фигуру  $C$  (рис. 1а). Размерности ( $\dim$ ) этих фигур обозначим:  $\dim A = a$ ,  $\dim B = b$ ,  $\dim C = c$ .

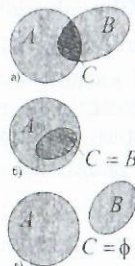


Рис. 1

Предположим  $a \geq b$ , тогда ясно, что  $c \leq b$ . В зависимости от значения размерности  $c$  можно различать следующие позиционные отношения фигур  $A$  и  $B$ .

1.  $0 \leq c < b$ . В этом случае имеет место отношение пересечения (рис. 1а):  $A \cap B = C$ . Множество  $C$  называется сечением фигур. В частности, когда  $c = 0$ , то сечением фигур будет точка (или конечное множество точек).
2.  $c = b$ . В этом случае фигуры  $B$  и  $C$ , очевидно, совпадают (рис. 1б), следовательно, имеет место отношение принадлежности:  $B \subset A$ .

3. Множество точек  $C$  целиком состоит из несобственных элементов пространства  $E^n$ . В этом случае имеет место отношение параллельности фигур  $A$  и  $B$ .

4.  $c < 0$ . В этом случае, как известно [1], множество является пустым:  $C = \emptyset$ , и имеет место отношение скрещивания:  $A \cdot B$ .

При решении конструктивных задач с помощью комплексного чертежа многомерного пространства часто возникает необходимость задания фигур с обеспечением того или иного их позиционного отношения. Корректное задание на чертеже таких фигур требует умения считать количество параметров, необходимых для обеспечения данного позиционного отношения.

Рассмотрим методику расчета количества этих параметров и выведем соответствующую формулу для позиционных отношений линейных фигур в пространстве  $E^n$ . Очевидно, что от линейности фигур  $A$  и  $B$  следует и линейность фигуры (множества)  $C$ .

Вычислим размерность  $e_c^n$  множества всех  $c$ -мерных линейных фигур, расположенных в пространстве  $E^n$ , которая, как известно [2], равна количеству параметров, необходимых и достаточных для свободного задания фигуры  $C$ .

Произвольная  $c$ -мерная линейная фигура ( $c$ -плоскость) однозначно определяется своими  $(c+1)$  независимыми точками (симплексом). Каждая точка в  $E^n$  определяется  $n$  параметрами, следовательно, симплекс  $c$ -плоскости однозначно задается  $n(c+1)$  параметрами. Но в этой  $c$ -плоскости имеется множество симплексов, которые определяют эту же  $c$ -плоскость. Так как в  $c$ -плоскости произвольная точка определяется  $c$  параметрами, то размерность множества эквивалентных для  $c$ -плоскости симплексов будет  $c(c+1)$ . В итоге получаем

$$e_c^n = n(c+1) - c(c+1) = (c+1)(n-c). \quad (1)$$

Аналогичным образом можно определить количества необходимых параметров для задания  $c$ -плоскостей, принадлежащих фигуре  $A$  ( $e_c^a$ ) и фигуре  $B$  ( $e_c^b$ ):

$$e_c^a = (c+1)(a-c); \quad e_c^b = (c+1)(b-c). \quad (2)$$

Число параметров ( $e_{n,o}$ ), необходимых для обеспечения данного позиционного отношения, определяется формулой

$$e_{n,o} = e_c^n - e_c^a - e_c^b, \quad \text{или} \\ e_{n,o} = (c+1)(n+c-a-b). \quad (3)$$

Формула (3) позволяет вычислить количество параметров, необходимых и достаточных для обеспечения любого позиционного отношения линейных фигур в пространстве произвольной размерности.

Рассмотрим пример для четырехмерного пространства. В  $E^4$  пусть имеем отношение принадлежности точки  $B$  и гиперплоскости  $A$  (рис. 2).

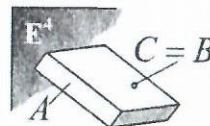


Рис. 2

В этом случае  $B = C$ , а размерности данных фигур будут  $n = 4$ ,  $a = 3$ ,  $b = c = 0$ .

Подставляя эти значения в формулу (3), получаем

$$e_{n,o} = (0+1)(4+0-3-0) = 1,$$

т.е. для обеспечения отношения принадлежности точки

и гиперплоскости в четырехмерном пространстве необходим всего один параметр.

Это, в свою очередь, означает, что для задания точки, принадлежащей уже заданной гиперплоскости, можно свободно выбрать три параметра (вместо четырех), а роль четвертого параметра играет условие принадлежности.

На трехкартинном плоском комплексном чертеже четырехмерного пространства рассмотрим задачу построения точки  $M$ , принадлежащей произвольно заданной гиперплоскости (рис. 3).

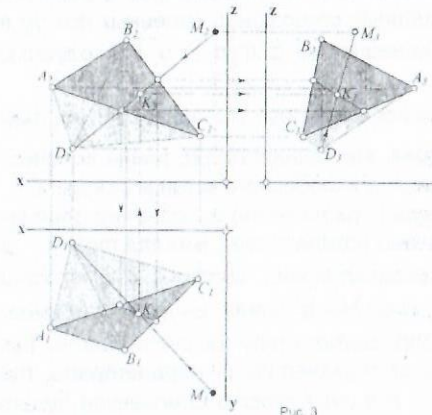


Рис. 3

Пусть гиперплоскость задана тремя проекциями ее симплекса  $ABCD$ .

Для построения какой-либо точки, принадлежащей этой гиперплоскости, как уже доказано, можно свободно выбрать ее три параметра.

Если в качестве этих параметров выберем декартовы координаты  $x, y, z$ , то они, очевидно, однозначно определяют пару проекций  $M_1, M_2$  искомой точки.

Для построения третьей проекции ( $M_3$ ) можно использовать точку пересечения прямой  $MD$

с плоскостью ( $ABC$ ), построение которой возможно, так как имеются две

проекции прямой  $MD$ . На чертеже построены три проекции  $K_1, K_2, K_3$

этой точки, а на третьей проекции  $D_3K_3$  прямой  $DK$  будет расположена

искомая проекция  $M_3$ .

искомая проекция  $M_3$ .

#### Литература

1. Согомонян К. А. Линейно-конструктивные методы формообразования (геометрическое моделирование). – Ереван: Ацтастан, 1990. – 214 с.
2. Джапаридзе И.С. Начертательная геометрия в свете геометрического моделирования. – Тбилиси: Ганатлеба, 1983. – 208.