УДК 517.946

А.О. БАБАЯН, Т.М. АВАНЕСЯН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для правильно эллиптического уравнения порядка $2N$. Решение ищется в пространстве функций, непрерывных вплоть до границы вместе с производными до порядка $N-1$. Получены условия, при которых задача однозначно разрешима, и при этом условии решение получено в явном виде.

Ключевые слова: задача Дирихле, правильно эллиптическое уравнение, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, непрерывные граничные значения.

Пусть $D=\{z=x+iy:\left|z\right|=r<1\}$ - единичный круг комплексной плоскости, а $\Gamma=\partial D$ - его граница. В области D рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{N} C_k \frac{\partial^{2N} V}{\partial x^k \partial y^{2N-k}}=0, \quad (x,y)\in D. \tag{1}$$

Здесь C_k - комплексные числа, такие, что $C_{2N}\neq 0$, и корни λ_j характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{2N} C_k \lambda^{2N-k}=0 \tag{2}$$

удовлетворяют условиям

$$\Im\lambda_j>0, \quad j=1,\dots,N; \;\; \Im\lambda_j<0, \quad j=N+1,\dots,2N; \;\; \lambda_j\neq\lambda_k,\; j\neq k. \tag{3}$$

Предполагается, что искомое решение V $2N$ раз непрерывно дифференцируемо в D и непрерывно вплоть до границы вместе с производными до порядка $N-1$ включительно, т.е. $V\in C^{N-1}\left(\overline{D}\right)$. Для уравнения (1) рассматриваем задачу Дирихле в классической постановке. На границе $\Gamma=\partial D$ неизвестная функция V удовлетворяет условиям Дирихле:

$$\left.\frac{\partial^k V}{\partial r^k}\right|_\Gamma = f_k\left(x,y\right),\ \left(x,y\right)\in\Gamma,\quad k=0,\ldots,N-1. \qquad (4)$$

Здесь заданные функции f_k принадлежат классу $C^{N-1-k}\left(\Gamma\right)$. Как известно (см. [1], [2]), задача (1), (4) для правильно эллиптического уравнения фредгольмова. В работах [3], [4] были определены дефектные числа этой задачи и в явном виде построено решение. В [5] аналогичные результаты были получены в случае кратных корней уравнения (2). Однако все эти результаты были получены в классах функций, непрерывных по Гельдеру. Класс непрерывных функций является более сложным для исследования, так как интеграл типа Коши, с помощью которого записывается решение, не инвариантен в этом классе.

В предлагаемой работе описан метод решения задачи (1), (4), позволяющий получить решение в пространстве непрерывных функций в явном виде.

Общее решение уравнения (1) представляется в виде (см. [5])

$$V\left(x,y\right)=\sum_{j=1}^{N}\Phi_j\left(z+\mu_j\overline{z}\right)+\sum_{j=1}^{N}\Psi_j\left(\overline{z}+\nu_j z\right), \qquad (5)$$

где Φ_j, Ψ_j $\left(j=1,\ldots,N\right)$ - искомые функции, аналитические в областях $D\left(\mu_j\right)=\left\{z+\mu_j\overline{z}\,\middle|\,z\in D\right\}$ $D_1\left(\nu_j\right)=\left\{\overline{z}+\nu_j z\,\middle|\,z\in D\right\}$ соответственно. Здесь различные числа μ_j, ν_j определяются соотношениями

$$\mu_j=\frac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j},\ \nu_j=\frac{i+\lambda_{j+N}}{i-\lambda_{j+N}},\ j=1,\ldots,N;\ \left|\mu_j\right|<1,\quad \left|\nu_j\right|<1. \qquad (6)$$

Граничные условия (4) можно представить в эквивалентной форме (см. [5]):

$$\left.\frac{\partial^{N-1}V}{\partial z^{N-1-k}\partial\overline{z}^k}\right|_\Gamma = F_k\left(x,y\right),\ k=\overline{0,N-1};\ \frac{\partial^k V}{\partial r^k}\left(1,0\right)=f_k\left(1,0\right),\ k=\overline{0,N-1}. \qquad (7)$$

Здесь непрерывные функции F_k однозначно определяются по граничным функциям f_k; $\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial\overline{z}}$ - комплексные операторы дифференцирования. Функции F_k представим рядом Фурье:

$$F_k\left(x,y\right)=F_k\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\equiv F_k\left(\theta\right)\sim\sum_{j=-\infty}^{\infty}d_{jk}e^{ij\theta}, \tag{8}$$

где d_{jk} - коэффициенты Фурье функции F_k. Отметим, что так как функции F_k непрерывны, то, вообще говоря, в (8) ставить знак равенства мы не можем, однако (см. [6]) при $r\to 1-0$ функции

$$F_{kr}\left(\theta\right)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}d_{jk}r^{|j|}e^{ij\theta} \tag{9}$$

равномерно на окружности сходятся к граничным функциям F_k:

$$F_{kr}\left(\theta\right)\to F_k\left(\theta\right),\ \left|\theta\right|\le\pi. \tag{10}$$

Поэтому сначала решим граничную задачу (1), (7) с гладкими граничными функциями F_{kr} :

$$\left.\frac{\partial^{N-1}V}{\partial z^{N-1-k}\partial\overline{z}^k}\right|_{\Gamma}=F_{kr}\left(x,y\right),\ k=\overline{0,N-1}. \tag{11}$$

Подставим неизвестную функцию (5) – общее решение уравнения (1) – в граничные условия (11). Имеем

$$\sum_{j=1}^{N}\mu_j^k\Phi_j^{(N-1)}\left(z+\mu_j\overline{z}\right)+\sum_{j=1}^{N}\nu_j^{N-1-k}\Psi_j\left(\overline{z}+\nu_j z\right)=F_{kr}\left(\theta\right),\ k=\overline{0,N-1},\ z=e^{i\theta}. \tag{12}$$

Будем использовать представление функций $\Phi_j^{(N-1)},\ \Psi_j^{(N-1)}\ \left(j=1,\dots,N\right)$ на окружности Γ с помощью аналитических в круге функций (Н.Е. Товмасян, 1968, см. [2]):

$$\Phi_j^{(N-1)}\left(z+\mu_j\overline{z}\right)=\varphi_j\left(z\right)+\varphi_j\left(\mu_j\overline{z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\mu_j^k z^{-k},\quad \left|z\right|=1, \tag{13}$$

$$\Psi_j^{(N-1)}\left(\overline{z}+\nu_j z\right)=\psi_j\left(\overline{z}\right)+\psi_j\left(\nu_j z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}\nu_j^k z^k,\ \left|z\right|=1. \tag{14}$$

Здесь A_{kj}, B_{kj} - постоянные, которые необходимо определить. Подставим представления (9), (13), (14) в (12). Имеем при $k=\overline{0,N-1}$:

$$\sum_{j=1}^{N}\mu_j^k\left(\sum_{m=0}^{\infty}A_{mj}z^m+\sum_{m=0}^{\infty}A_{mj}\mu_j^m z^{-m}\right)+\sum_{j=1}^{N}\nu_j^{N-1-k}\left(\sum_{m=0}^{\infty}B_{mj}z^{-m}+\sum_{m=0}^{\infty}B_{mj}\nu_j^m z^m\right)=F_{kr}\left(\theta\right),$$

или после группировки:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}\mu_j^k A_{mj}+\sum_{j=1}^{N}B_{mj}\nu_j^{N-1-k+m}\right)z^m+\left(\sum_{j=1}^{N}A_{mj}\mu_j^{m+k}+\sum_{j=1}^{N}B_{mj}\nu_j^{N-1-k}\right)z^{-m}\right)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}d_{km}r^{|m|}z^m,\qquad |z|=1,\quad k=0,\ldots,N-1.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z^m и z^{-m} (здесь и далее уже предполагаем $m\geq 0$), получим систему для определения неизвестных коэффициентов A_{mj}, B_{mj}. При $m=0$ получим систему N уравнений:

$$2\sum_{j=1}^{N}\mu_j^k A_{0j}+2\sum_{j=1}^{N}B_{0j}\nu_j^{N-1-k}=d_{0k},\quad k=\overline{0,N-1}. \tag{15}$$

При $m\geq 1$ получаем систему $2N$ уравнений:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}\mu_j^k A_{mj}+\sum_{j=1}^{N}B_{mj}\nu_j^{N-1-k+m}=d_{mk}r^m,\\ \sum_{j=1}^{N}A_{mj}\mu_j^{m+k}+\sum_{j=1}^{N}B_{mj}\nu_j^{N-1-k}=d_{-mk}r^m,\end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрим Ω_m - основную матрицу системы (16). Имеем

$$\Omega_m=\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1 & \nu_1^{N-1+m} & \nu_2^{N-1+m} & \ldots & \nu_N^{N-1+m}\\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_N & \nu_1^{N-2+m} & \nu_2^{N-2+m} & \ldots & \nu_N^{N-2+m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \mu_1^{N-1} & \mu_2^{N-1} & \ldots & \mu_N^{N-1} & \nu_1^m & \nu_2^m & \ldots & \nu_N^m\\ \mu_1^m & \mu_1^m & \ldots & \mu_1^m & \nu_1^{N-1} & \nu_2^{N-1} & \ldots & \nu_N^{N-1}\\ \mu_1^{m+1} & \mu_1^{m+1} & \ldots & \mu_1^{m+1} & \nu_1^{N-2} & \nu_2^{N-2} & \ldots & \nu_N^{N-2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \mu_1^{N-1+m} & \mu_1^{N-1+m} & \ldots & \mu_1^{N-1+m} & 1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Введем следующие обозначения:

$$J = diag\left(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\right), \quad L = diag\left(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\right),$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \dots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \nu_1^{n-1} & \nu_2^{n-1} & \dots & \nu_n^{n-1} \\ \nu_1^{n-2} & \nu_2^{n-2} & \dots & \nu_n^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Тогда матрица Ω_m записывается в следующей форме:

$$\Omega_m = \begin{pmatrix} S & TL^m \\ SJ^m & T \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Рассмотрим сначала однородную задачу (1), (11) ($F_k \equiv 0$). Количество нетривиальных решений этой задачи определяется решениями системы (16). По нетривиальным решениям однородных систем (15) и (16), согласно формулам (5), (13) и (14), получаем решение однородной задачи (1), (11). Отметим, что если система линейных уравнений (16) имеет нетривиальное решение при $m = m_0$, то соответствующее нетривиальное решение однородной задачи (1), (11) является многочленом порядка $m_0 + N - 1$. Используя результат из [7], имеем также, что многочлен, удовлетворяющий однородным условиям (4), должен делиться на $\left(1 - z\overline{z}\right)^N$, т.е. должен иметь степень не ниже $2N$. Поэтому можем заключить, что количество линейно независимых решений равно следующей величине:

$$K = \sum_{m=N+1}^{\infty} \left(2N - rank\Omega_m\right). \quad (20)$$

Действительно, если $m \le N - 1$, то соответствующее решение однородной задачи (1), (11) является многочленом порядка не выше $2N - 1$, т.е. тождественно равно нулю. При $m = N$ матрица Ω_N является матрицей Вандермонда с различными элементами, т.е. $\det \Omega_N \ne 0$, следовательно, $2N - rank\Omega_N = 0$. Отметим также, что при $m \to \infty$:

$$\det \Omega_m \to \det J \cdot \det L \ne 0, \quad (21)$$

поэтому в сумме (20) только конечное число слагаемых.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Однородная задача (1), (11) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\det \Omega_m \neq 0, \quad m = N+1, N+2, \ldots . \tag{22}$$

Если условие (22) нарушается при $m = m_0$, то соответствующая однородная задача (1), (11) имеет нетривиальное решение, которое является многочленом степени $m_0 + N - 1$. Итак, общее количество линейно независимых решений однородной задачи (1), (11) определяется по формуле (22).

Рассмотрим неоднородную задачу (1), (11). Предположим, что выполнены условия (22). Тогда коэффициенты A_{mj}, B_{mj} при $m \geq N$ определяются единственным образом. Из (18) следует, что при $m \leq N-1$ матрица (15) вырождена, так как содержит одинаковые строки, поэтому ранг соответствующей матрицы системы (16) меньше $2N$. Однако прямым вычислением можно проверить, что для этих систем выполняются условия теоремы Кронекера-Капелли (см. [5]), т.е. эти системы разрешимы. Система (15) также имеет решение. Таким образом, получаем, что все неизвестные коэффициенты A_{mj}, B_{mj} можем определить. При этом из условия (21) следует, что эти коэффициенты имеют такую же скорость убывания на бесконечности, как и $d_{mk} r^{|m|}$, т.е. соответствующие функции $\Phi_j^{(N-1)}$ и $\Psi_j^{(N-1)}$ непрерывны вплоть до границы, а значит, решение задачи (1), (11) принадлежит требуемому функциональному классу.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. При выполнении условий (22) неоднородная задача (1), (11) всегда имеет решение. Если условия (22) нарушаются, то для разрешимости неоднородной задачи (1), (11) необходимо и достаточно, чтобы граничные функции F_k удовлетворяли K условиям ортогональности (K определено в (20)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lions J.-L., Magenes E**. Problémes Aux Limites Non Homogénes at Application**s.** Vol. 1.- Dunod, Paris, 1968. – 484p.
2. **Tovmasyan N.E**. Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields.-World Scientific, Singapore, 1998.-254p.
3. **Tovmasyan N.E.** Dirichlet problem for properly elliptic equation in the multiply connected domains// Izvestiya NAN Armenii. Matematica. – 2002.-V. **3,** №6.-P. 5–40.
4. **Babayan A.H**. On unique solvability of the Dirichlet problem for one class of properly elliptic equations//Topics in Analysis and its Applications. NATO Sciences Series.– Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Series 2. - 2004.- Vol. 147 . - P. 287–295.

5. **Babayan A.H**. Dirichlet Problem for Properly Elliptic Equation in the Unit Disk// Izvestiya NAN Armenii. Matematica. – 2003.-V. **38**, №6.- P. 39–48
6. **Hardy G.H., Rogosinski W.W.** Fourier Series.– Cambridge: Cambridge University Press, 1956.- 156p.
7. **Axler S., Bourdon P., Ramey W.** Harmonic Function Theory.– New York, Inc., Springer – Verlag, 2001. – 224p.

Ա.Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ, Տ.Ա. ԱՎԱՆԵՍՅԱՆ

ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍՈՒՄ ՃՇԳՐԻՏ ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը միավոր շրջանում $2N$ կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար: Լուծումը պետք է գտնել $N-1$ կարգի ածանցյալների հետ միասին՝ ընդհուպ մինչև եզրը անընդհատ ֆունկցիաների դասում: Գտնվել են խնդրի միարժեք լուծելիության պայմանները, և այդ պայմանների առկայության դեպքում լուծումը որոշվել է բացահայտ տեսքով:

Առանցքային բառեր. Դիրիխլեի խնդիր, ճշգրիտ էլիպսական հավասարում, Դիրիխլեի համասեռ խնդրի ոչ զրոյական լուծումներ, անընդհատ եզրային արժեքներ:

A.H. BABAYAN, T.M. AVANESYAN

ON A DIRICHLET PROBLEM FOR THE PROPERLY ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATION IN THE CONTINUOUS FUNCTIONS SPACE

The Dirichlet problem in a unit disc for an order $2N$ properly elliptic equation is considered. The solution should be found in the class of functions, continuous up to the boundary with derivatives of order $N-1$. The conditions of the unique solvability of the problem are found and, in this case, the solution is determined in an explicit form.

***Keywords*:** Dirichlet problem, properly elliptic equation, nontrivial solutions of homogeneous Dirichlet problem, continuous boundary values.