УДК 19.66: 519.668

А.Ж. ХАЧАТРЯН, А.Р. МЕЛКОНЯН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. СВЯЗЬ ГАРМОНИЧЕСКОЙ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЙ

Предложен основанный на геометрических соображениях новый метод для определения известных соотношений, действующих между тригонометрическими функциями и их производными. На основе развитого подхода воспроизведён также классический результат Эйлера касательно связи элементарных тригонометрических функций с экспоненциальной функцией.

Ключевые слова: производная, синус, косинус, формула Эйлера.

Как известно, одной из базовых характеристик для произвольной функции $f(x)$ является понятие ее производной, основанное на существовании предела отношения

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{1}$$

когда положительное приращение аргумента Δx стремится к нулю. Если руководствоваться обозначением

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x), \tag{2}$$

то производная функции может быть записана в виде

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Величину $f'(x)$ принято называть первой производной функции $f(x)$, а величину $\Delta f(x)$ - ее первой разностью.

Наряду с первой производной важной характеристикой функции являются производные более высокого порядка, рассмотрение которых базируется на определениях разностей функции более высокого по сравнению с (2) порядка. Так, разность второго порядка определяется разностью функции первого порядка в двух соседних точках:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+\Delta x) - \Delta f(x). \tag{4}$$

Пользуясь (2), нетрудно убедиться, что

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2\Delta x) - 2\cdot f(x+\Delta x) + f(x)\ . \qquad (5)$$

Как видно из формулы (5), в отличие от разности первого порядка (2), содержащей значения функции в двух близких точках x и $x+\Delta x$, разность второго порядка содержит значения функции в трех близких точках: x, $x+\Delta x$ и $x+2\Delta x$ соответственно. Вторая производная функции определяется как отношение разности второго порядка к квадрату приращения независимой переменной, когда данное приращение стремится к нулю:

предел

$$f''(x) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}\ . \qquad (6)$$

Учитывая (3), (4), нетрудно также убедиться, что

$$f''(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}\ . \qquad (7)$$

Как видно из формулы (4), разность второго порядка есть не что иное, как разность разности первого порядка:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\Delta f(x)\ . \qquad (8)$$

Руководствуясь той же логикой, можно сказать, что разность третьего порядка есть разность разности второго порядка:

$$\Delta^3 f(x) = \Delta\Delta^2 f(x) = \Delta\Delta\Delta f(x)\ . \qquad (9)$$

Из вышеизложенного следует, что при известной разности $(n-1)$ - го порядка разность функции n - го порядка определяется согласно формуле

$$\Delta^n f(x) = \Delta\Delta^{n-1} f(x) = \Delta^{n-1} f(x+\Delta x) - \Delta^{n-1} f(x)\ . \qquad (10)$$

Используя (10), методом математической индукции можно доказать, что разность n - го порядка определяется значениями функции $f(x)$ в $(n+1)$ точках x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, $\cdots$, $x+n\cdot\Delta x$ согласно следующей формуле (см. [1]):

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k\, f(x+(n-k)\cdot\Delta x)\,, \qquad (11)$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\ . \qquad (12)$$

В свете сказанного производная n - го порядка будет определяться как предельное значение отношения

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}. \tag{13}$$

Введем теперь оператор перевода значения функции, который переводит значение функции в точке x в ее значение в точке $x + \Delta x$. Для построения данного оператора воспользуемся символом обозначения разности значений функции в двух соседних точках (2) и рассмотрим следующую запись:

$$f\left(x + \Delta x\right) = (1 + \Delta) f\left(x\right). \tag{14}$$

Если формально принять, что для левой части данного равенства правомерна также запись $(1 + \Delta) f\left(x\right) = 1 + \Delta f\left(x\right)$, т.е. к символу Δ относиться как к математической величине, то, пользуясь (2), легко можно увидеть, что равенство (14) переходит в тождество. Из вышеизложенного следует, что запись (14) может быть интерпретирована как действие или операция, которая переводит значение функции в точке x в ее значение в точке $x + \Delta x$.

Руководствуясь той же логикой, докажем теперь, что оператор $(1 + \Delta)^2$ будет переводить значение функции в точке x в ее значение в точке $x + 2 \cdot \Delta x$. Для этого примем правомерность записи

$$(1 + \Delta)^2 = (1 + \Delta) \cdot (1 + \Delta) = 1 + 2 \cdot \Delta + \Delta^2 \tag{15}$$

и рассмотрим равенство

$$f\left(x + 2\Delta x\right) = (1 + \Delta)^2 f\left(x\right) = f\left(x\right) + 2 \cdot \Delta f\left(x\right) + \Delta^2 f\left(x\right). \tag{16}$$

Используя (2) и (5), легко убедиться, что данное равенство также переходит в тождество. Интересно заметить, что тождественность (16) может быть также доказана на основе (14), если рассматривать в нем x как $x + \Delta x$. Действительно,

$$f\left(x + 2\Delta x\right) = (1 + \Delta) f\left(x + \Delta x\right) = (1 + \Delta)(1 + \Delta) f\left(x\right) = (1 + \Delta)^2 f\left(x\right). \tag{17}$$

На основе вышеизложенного можно заключить, что оператор $(1 + \Delta)^n$ будет переводить значение функции в точке x в ее значение в точке $x + n \cdot \Delta x$:

$$f\left(x + n \cdot \Delta x\right) = (1 + \Delta)^n f\left(x\right). \tag{18}$$

Применяя известную формулу бинома Ньютона к выражению $(1+\Delta)^n$, данное равенство может быть записано в виде

$$f\left(x+n\cdot\Delta x\right)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,\Delta^k f(x)\,. \tag{19}$$

Интересно проследить связь формулы (19) с известной формулой Тейлора о представлении функции в виде бесконечного степенного ряда (см. [2]). Для этого, принимая обозначение

$$y = n\cdot\Delta x\,, \tag{20}$$

запишем ряд (19) в следующем виде:

$$f\left(x+y\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}\frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k}y^k\,. \tag{21}$$

Рассмотрим предельное значение данного ряда при условиях, что

$$n\to\infty\,,\ \Delta x\to 0\,, \tag{22}$$

причем

$$\lim_{n\to\infty,\Delta x\to 0}\left(n\cdot\Delta x\right)=y\,. \tag{23}$$

Используя (12), легко убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^k}{n^k}=\frac{1}{k\,!}\,. \tag{24}$$

Учитывая (24), а также (13), предельное значение ряда (21) запишется в виде

$$f\left(x+y\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k\,!}\frac{d^k f(x)}{dx^k}y^k\,. \tag{25}$$

Рассматривая

$$x=x_0\ \text{ и }\ y=x-x_0\,, \tag{26}$$

легко увидеть, что (25) принимает вид

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k\,!}\frac{d^k f(x_0)}{dx^k}(x-x_0)^k\,. \tag{27}$$

Данное выражение есть не что иное, как представление функции $f\left(x\right)$ в виде степенного ряда в окрестности точки x_0.

Здесь следует заметить, что вывод формулы (27) был дан при условии, что $y > 0$ (см. (20)), т.к. приращение аргумента функции Δx всегда предполагается большим нуля ($\Delta x > 0$). С учетом (26) из сказанного вытекает, что в (27) значение x должно рассматриваться большим по сравнению со значением x_0 ($x > x_0$).

Для обобщения формулы (27) для случая $x < x_0$ заметим, что действие оператора $1 - \Delta$ на функцию $f(x)$ сдвигает его значение в точке x в значение в точке $x - \Delta x$. Действительно, пользуясь (2), легко проверить, что

$$f\left(x - \Delta x\right) = (1 - \Delta) f\left(x\right). \tag{28}$$

Очевидно также, что n кратное действие оператора $(1 - \Delta)$ на функцию $f\left(x\right)$ переводит ее значение в точке x в значение в точке $x - n \cdot \Delta x$:

$$f\left(x - n \cdot \Delta x\right) = (1 - \Delta)^n f\left(x\right). \tag{29}$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона, данное выражение может быть записано в виде

$$f\left(x - n \cdot \Delta x\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \, \Delta^k f(x). \tag{30}$$

Снова, как и в случае (19), примем обозначение $y = n \cdot \Delta x$ (см. (20)) и запишем (30) в следующем виде:

$$f\left(x - y\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k} (-1)^k \, \frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k} y^k. \tag{31}$$

Рассматривая предельное значение данной суммы, когда $n \cdot \to \infty$, $\Delta x \to 0$, а также учитывая (23), (24), легко увидеть, что

$$f\left(x - y\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k \, \frac{d^k f(x)}{dx^k} y^k. \tag{32}$$

Сравнивая равенства (25) и (32), можно заметить, что замена в одном из них знака величины y на $-y$ переводит одно в другое. Из этого непосредственным образом следует, что если рассматривать y как знакопеременную величину, то формула (25) будет применима при любом ее знаке. Сказанное, в свою очередь, будет означать, что записью (27) можно пользоваться как при $x > x_0$, так и при $x < x_0$.

Одним из важных объектов исследования теории функций являются дифференциальные уравнения, в которых, по сути, закодирована закономерность функции. Данный код дается связью между функцией, ее производными и независимой переменной. С практической точки зрения, наибольший практический интерес представляют дифференциальные уравнения, являющиеся полиномиальными уравнениями по степеням независимой переменной, функций и производных функции. Запишем сказанное в следующем виде:

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = 0 \quad . \tag{33}$$

Наиболее изученными из класса дифференциальных уравнений (33) могут считаться так называемые линейные дифференциальные уравнения, в которых зависимость F от функций и ее производных линейна. Сказанное означает, что в случае линейного уравнения запись (33) должна укладываться в форму

$$p(x) + g_0(x) f(x) + g_1(x) \frac{df(x)}{dx} + g_2(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \cdots + g_n(x) \frac{d^n f(x)}{dx^n} = 0 \quad , \tag{34}$$

где $p(x), g_0(x), g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ являются заданными функциями от переменной x. Если $p(x) \equiv 0$, то уравнение (34) принято называть однородным, в противном случае - неоднородным.

Очевидно, что уравнение

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) \tag{35}$$

относится к классу однородных линейных дифференциальных уравнений.

Воспользуемся (35) для получения функции $f(x)$ в виде ряда (27). Для этого достаточно заметить, что из уравнения (35) следует

$$f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \cdots = \frac{d^n f(x)}{dx^2} \, , \tag{36}$$

т.е. не только первая, но и все остальные производные равны функции, и, следовательно, они равны также друг другу. Тогда (27) перепишется как

$$f(x) = f(x_0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \ . \tag{37}$$

Известно, что дифференциальному уравнению (35) удовлетворяет функция e^x. Интересно, базируясь на определении числа e, т.е. основываясь на значении предела

$$e \equiv \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x} \ , \tag{38}$$

получение непосредственно из дифференциального уравнения (35) функции e^x. Для этого, рассматривая малые значения Δx, запишем дифференциальное уравнение (35) в виде

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x \ , \tag{39}$$

которое с учетом (35) может быть представлено также в виде

$$f(x + \Delta x) = f(x)(1 + \Delta x) \ . \tag{40}$$

Рассмотрим теперь уравнение (40) в точке $x + \Delta x$:

$$f(x + 2\Delta x) = f(x + \Delta x)(1 + \Delta x) \ . \tag{41}$$

Подставляя (40) в (41), получим

$$f(x + 2\Delta x) = f(x)(1 + \Delta x)^2 \ . \tag{42}$$

Руководствуясь той же логикой, нетрудно показать, что

$$f(x + n\Delta x) = f(x)(1 + \Delta x)^n \ . \tag{43}$$

Пользуясь теперь обозначением $y = n \cdot \Delta x$ (см. (20)), запишем (43) в следующем виде:

$$f(x + y) = f(x)\left((1 + \Delta x)^{1/\Delta x}\right)^y \ . \tag{44}$$

Учитывая (38), нетрудно убедиться, что в пределе $\Delta x \to 0$ соотношение (44) принимает вид

$$f(x + y) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x)\left((1 + \Delta x)^{1/\Delta x}\right)^y = f(x) \cdot e^y \ . \tag{45}$$

Рассматривая $x = x_0$ и $y = x - x_0$ (см. (26)), получим окончательный вид функции (35), удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$f(x) = f(x_0) \cdot e^{(x-x_0)}. \tag{46}$$

Далее, помимо дифференциального уравнения (35), представляет также интерес рассмотрение дифференциального уравнения вида

$$f(x) = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2}. \tag{47}$$

Из данного уравнения непосредственно следует, что

$$f(x) = \left(-1\right)^n \frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}}. \tag{48}$$

Если дифференцировать обе части (48), то можно найти связь между первой производной функции $f(x)$ и высшими нечетными производными $f(x)$:

$$\frac{df(x)}{dx} = (-1)^n \frac{d^{2n+1} f(x)}{dx^{2n+1}}. \tag{49}$$

Представим теперь ряд Тейлора (27) в виде суммы двух рядов с чётными и нечётными индексами:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{d^{2k} f(x_0)}{dx^{2k}} (x - x_0)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{d^{2k+1} f(x_0)}{dx^{2k+1}} (x - x_0)^{2k+1} \tag{50}$$

и воспользуемся соотношениями (48), (49), действующими между производными функции $f(x)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (47):

$$f(x) = f(x_0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - x_0)^{2k}}{(2k)!} + \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{51}$$

Пусть $f(x_0) = 0$ и $df(x_0)/dx = 1$. Тогда из (51) получим известное представление функции $\sin x$ в виде ряда Тейлора (см. [2]):

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{52}$$

Если $f(x_0) = 1$ и $df(x_0)/dx = 0$, то из (51) получим представление функции $\cos x$ в виде ряда Тейлора:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - x_0)^{2k}}{(2k)!} \quad . \tag{53}$$

Если формально в ряде (37) аргумент рассматривать как чисто мнимую величину, т.е. если вместо x подставлять $i \cdot x$, то нетрудно получить, что

$$e^{i \cdot x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \cdot (x - x_0))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - x_0)^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!} . \tag{54}$$

Пользуясь (52) и (53), получим известную формулу Эйлера:

$$e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \sin x . \tag{55}$$

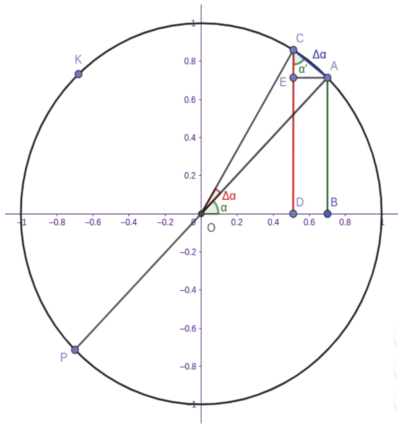


Рис. Определение функций "синус" и "косинус"

Интересно, что доказательство того, что синус и косинус удовлетворяют дифференциальному уравнению (47), можно осуществлять, опираясь на геометрическое определение синуса и косинуса (см. [3]).

Рассмотрим единичную окружность, на которой отмечен некоторый угол α, положительное значение которого отчитывается против часовой стрелки. Рассмотрим также малое положительное приращение данного угла $\Delta\alpha$ (см. рисунок). Как известно, функции "синус" и "косинус" являются ординатой и абсциссой точки на единичной окружности в зависимости от угла α :

$$h(\alpha) = \sin\alpha , \;\; g(\alpha) = \cos\alpha . \tag{56}$$

Используя (56), для приращений функций "синус" и "косинус" можем написать

$$\Delta h(\alpha) = h(\alpha + \Delta\alpha) - h(\alpha) , \;\; \Delta g(\alpha) = g(\alpha + \Delta\alpha) - g(\alpha) . \tag{57}$$

Как можно увидеть из рисунка,

$$\Delta h(\alpha) = EC\ ,\ \Delta g(\alpha) = BD\ . \tag{58}$$

Очевидно, что когда величина $\Delta\alpha$ достаточно мала, то длина хорды AC приблизительно равняется длине дуги AC, а в пределе их длины будут равны. Тогда в треугольнике $\Delta\, ACE$ гипотенуза приблизительно равна $\Delta\alpha$. Очевидно также, что величина угла $\angle ACE$ приблизительно равна величине угла α:

$$\alpha < \angle ACE < \alpha + \Delta\alpha\ . \tag{59}$$

Обозначим $\alpha' = \angle ACE$. Тогда из (59) ясным образом следует, что

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} \alpha' = \alpha\ . \tag{60}$$

Тогда по определению синуса и косинуса имеем

$$EC = \Delta\alpha \cdot \cos\alpha'\ , \tag{61}$$

$$BD = -\Delta\alpha \cdot \sin\alpha'\ . \tag{62}$$

Теперь, используя (58), а также (60) - (62), легко определить, что

$$\frac{dh(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta h(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{EC}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \cos\alpha' = \cos\alpha\ , \tag{63}$$

$$\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta g(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{BD}{\Delta\alpha} = -\lim_{\Delta\alpha\to 0} \sin\alpha' = -\sin\alpha\ . \tag{64}$$

Используя (63), (64), а также обозначения (56), можно увидеть, что

$$\frac{dh(\alpha)}{d\alpha} = g(\alpha)\, , \frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = -h(\alpha)\ . \tag{65}$$

Дифференцируя обе части уравнений (65) и снова используя (65), легко убедиться, что функции $h(\alpha)$, $g(\alpha)$ действительно удовлетворяют дифференциальному уравнению (47):

$$\frac{d^2 h(\alpha)}{d\alpha^2} = -h(\alpha)\, ,\ \frac{d^2 g(\alpha)}{d\alpha^2} = -g(\alpha)\ . \tag{66}$$

Несмотря на то, что функции $h(\alpha)$, $g(\alpha)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению, они удовлетворяют различным начальным условиям:

$$h(0) = 0\ ,\ dh(0)/d\alpha = 1 \text{ и } g(0) = 1\, ,\ dg(0)/d\alpha = 0\ . \tag{67}$$

Интересно, что формула Эйлера (55) может быть получена на основе дифференциального уравнения (47), а также определения числа

$$e^i \equiv \lim_{\Delta x \to 0}(1 + i\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}, \tag{68}$$

где i - мнимая единица. Используя (56), произведем следующие обозначения:

$$\alpha = N \cdot \Delta\alpha , \tag{69}$$

$$h[N] = h(N \cdot \Delta\alpha), \tag{70}$$

$$g[N] = g(N \cdot \Delta\alpha). \tag{71}$$

С учетом (69) - (71) запись дифференциальных уравнений (66) в конечных разностях приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$h[N+2] - 2 \cdot h[N+1] + h[N] = -h[N] \cdot \Delta\alpha^2, \tag{72}$$

$$g[N+2] - 2 \cdot g[N+1] + g[N] = -g[N] \cdot \Delta\alpha^2 \tag{73}$$

со следующими начальными условиями (см. (67)):

$$h(0) = 0,\ h(1) = \Delta\alpha , \tag{74}$$

$$g(0) = 1,\ g(1) = 1. \tag{75}$$

Попробуем найти решение уравнения (72) в виде $h(N) = A \cdot \alpha^N$. Тогда

$$A \cdot \alpha^{N+2} - 2A \cdot \alpha^{N+1} + A \cdot \alpha^N = -A \cdot \alpha^N \Delta\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \Delta\alpha^2 = 0. \tag{76}$$

Решением квадратного уравнения (76) является

$$\alpha_{1,2} = 1 \pm i \cdot \Delta\alpha . \tag{77}$$

Так как решением уравнения является два, то

$$h(N) = A \cdot \alpha_1^N + B \cdot \alpha_2^N = A \cdot (1 + i \cdot \Delta\alpha)^{\frac{\alpha}{\Delta\alpha}} + B \cdot (1 - i \cdot \Delta\alpha)^{\frac{\alpha}{\Delta\alpha}}, \tag{78}$$

и по определению (68) заключаем, что

$$h(N) = A \cdot e^{i\alpha} + B \cdot e^{-i\alpha}. \tag{79}$$

Теперь надо найти числа A и B. Для этого используем начальные условия (74):

$$
\begin{cases} A\cdot(1+i\cdot\Delta\alpha)^0 + B\cdot(1-i\cdot\Delta\alpha)^0 = 0, \\ A\cdot(1+i\cdot\Delta\alpha)^1 + B\cdot(1-i\cdot\Delta\alpha)^1 = \Delta\alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} A+B=0, \\ A+B+i\cdot\Delta\alpha(A-B)=\Delta\alpha \end{cases} \tag{80}
$$

или, что то же самое:

$$
\begin{cases} A+B=0, \\ A-B=1/i. \end{cases} \tag{81}
$$

Решением данной системы является $A = 1/2i$, $B = -1/2i$, т.е. уравнение (79) будет иметь вид

$$
h(N) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}. \tag{82}
$$

Проводя аналогичные рассуждения для уравнения (73) с начальными условиями (75), можно получить

$$
g(N) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}. \tag{83}
$$

Уравнения (82) и (83) есть формулы Эйлера, которые связывают между собой гармонические функции и экспоненциальную функцию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей.- М.: ГИТТЛ, 1952.- 400 с.
2. **Зорич В.А.** Математический анализ. Часть I, издание 9.- М.: МЦНМО, 2018.- 562 с.
3. **Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Ս.** Հանրահաշիվ և Մաթեմատիկական Անալիզի Տարրեր 10.- Երևան: Տիգրան մեծ, 2009.- 208էջ:

Ա.Ժ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Հ.Ռ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՍՏԱՑՄԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿ: ՀԱՐՄՈՆԻԿ ԵՎ ԷՔՍՊՈՆԵՆՏԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԱՊԸ

Առաջարկվում է եռանկյունաչափական ֆունկցիաների և դրանց ածանցյալների միջև գործող հարաբերությունները որոշելու նոր մեթոդ՝ հիմնված երկրաչափական նկատառումների վրա: Տրված մոտեցման հիման վրա վերարտադրվում է նաև Էյլերի դասական արդյունքը տարրական եռանկյունաչափական ֆունկցիաների և էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի միջև կապի վերաբերյալ:

Առանցքային բառեր. ածանցյալ, սինուս, կոսինուս, Էյլերի բանաձև:

A.ZH. KHACHATRYAN, H.R. MELKONYAN

A GEOMETRIC METHOD FOR FINDING THE DERIVATIVE OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS. CONNECTION OF HARMONIC AND EXPONENTIAL FUNCTIONS

A new method based on geometric considerations for determining the known relationships between trigonometric functions and their derivatives is proposed. On the basis of the developed approach, the classical result of Euler concerning the connection between elementary trigonometric functions and the exponential function is also reproduced.

Keywords: derivative, sine, cosine, Euler's formula.

UDC 621.391

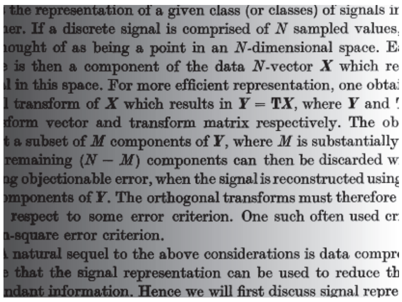
S.H. KHACHATRYAN, L.G. MINASYAN

ONE IMAGE ILLUMINATION COMPENSATION ALGORITHM

An algorithm for compensating for uneven distribution of illumination on digital images and, in particular, on digitized text images, is described to improve the image quality and text legibility.

Keywords: algorithm, compensation, uneven distribution of illumination.

Images obtained by photographing, depending on the lighting, do not always have a satisfactory quality. Nowadays, photosensitive film cameras have given way to digital cameras. Photos taken by a digital camera save photos in a digital format, which makes it possible to digitally process images to improve their quality [1-9].



the representation of a given class (or classes) of signals ir
ner. If a discrete signal is comprised of N sampled values,
hought of as being a point in an N-dimensional space. E
is then a component of the data N-vector $\boldsymbol{X}$ which re
l in this space. For more efficient representation, one obta
l transform of $\boldsymbol{X}$ which results in $\boldsymbol{Y} = \mathbf{T}\boldsymbol{X}$, where $\boldsymbol{Y}$ and
sform vector and transform matrix respectively. The ob
t a subset of M components of $\boldsymbol{Y}$, where M is substantially
remaining $(N - M)$ components can then be discarded w
ng objectionable error, when the signal is reconstructed using
mponents of $\boldsymbol{Y}$. The orthogonal transforms must therefore
respect to some error criterion. One such often used cr
n-square error criterion.
A natural sequel to the above considerations is data compr
e that the signal representation can be used to reduce th
ndant information. Hence we will first discuss signal repre

Fig 1. Image of text with uneven lighting

Currently, the task of digitizing images and documents is very relevant. Digital cameras and scanners are commonly used to digitize documents. As a result of digitization, images with an uneven distribution of illumination are often obtained, which degrades the quality of images, distorts and complicates their perception. Figure 1 shows an image of text with uneven lighting.