С.А. ЕПИСКОПОСЯН

О РАВНОМЕРНОЙ ГРИДИ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ КРЕСТЕНСОНА – ЛЕВИ

Изучены вопросы существования функций $U(x) \in L^1[0,1]$ со строго убывающими коэффициентами Фурье - Крестенсона – Леви, обладающими свойством равномерной гриди универсальности.

Ключевые слова: система Кристенсона - Леви, функция, универсальный.

УДК 517

Р.В. ДАЛЛАКЯН

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ БЛЯШКЕ, НУЛИ КОТОРЫХ ПРИБЛИЖАЮТСЯ К ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ ПО КАСАТЕЛЬНЫМ ПУТЯМ

(Ванадзор)

В работе сначала обобщается один пример С.А. Виноградова. После доказывается, что в этом примере нули произведения Бляшке не могут стремиться к единичной окружности лишь по касательным путям. Этот пример показывает, что утверждения теорем 1 и 2 этой работы могут выполняться одновременно.

Ключевые слова: произведение Бляшке, угол Штольца, приближение к единичной окружности по касательным путям, формула Йенсена, функциональные классы D^p_{p-1}, H^p, B.

Введение. Пусть D – единичный круг комплексной плоскости C; $H(D)$ – множество голоморфных в D функций. Далее, пусть для $z = re^{i\varphi} \in D$:

$$M_p(r;f) = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}}, \textit{ когда } 0 < p < +\infty, \\ \sup\limits_{0 \le \varphi \le 2\pi} \left| f(re^{i\varphi})\right|, \textit{ когда } \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Множество функций из $H(D)$, для которых

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} M_p(r;f) < +\infty,$$

называется классом H^p Харди $(0 < p \le +\infty)$.

Скажем, что функция $f \in H(D)$ принадлежит классу B –Блоха, если

$$\lim_{|z|\to 1-}\left(1-|z|^2\right)\cdot|f'(z)|=0.$$

Функциональный класс D^p_{p-1}, $0<p<+\infty$ определяется как множество тех функций из $H(D)$, для которых

$$\|f\|_{D^p_{p-1}}=\left\{p\cdot\int_D\left(1-|z|^2\right)^{p-1}\cdot|f'(z)|^p\,dA(z)\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

где $dA(z)=\dfrac{1}{\pi}rdrd\varphi,\ z=re^{i\varphi}$.

Пусть последовательность $\{a_n\}\in D$ такая, что

$$\sum_n(1-|a_n|)<+\infty.\ \text{(B)}$$

Произведением Бляшке, порожденным множеством $\{a_n\}$, называется следующая функция:

$$B(z)=B(z;\{a_n\})=\prod_n\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\cdot\frac{|a_n|}{a_n},\quad z\in D.$$

Далее, пусть $\sigma\in[1,+\infty)$ и $E\in D$. Если для любой точки $z\in E$ выполняется условие

$$\left|e^{i\Theta_0}-z\right|\le\sigma(1-|z|),$$

то говорят, что множество E лежит в угле $\Omega_\sigma\left(e^{i\Theta_0}\right)$ Штольца.

В работе [1] С.А. Виноградов доказал, что:

1) если (см.стр.47) $0<p\le 2$, то $D^p_{p-1}\subset H^p$;

2) если (см.стр.48) $1\le p<2$, то $H^\infty\cap D^p_{p-1}\ne H^\infty$;

3) если (см.стр.54) $0<p<q<+\infty$, то $D^p_{p-1}\cap B\subset D^q_{q-1}\cap B$;

4) если (см.стр.57) $\sigma\in[1,+\infty)$, а $\{a_n\}\subset\Omega_\sigma\left(e^{i\Theta_0}\right)$ и удовлетворяет условию (B), то

$$B(z)=B(z;\{a_n\})\in\prod_{0<p<+\infty}D^p_{p-1};$$

5) если $p \in (0,1)$ и $B(z;\{a_n\})$ – произведение Бляшке, порожденное множеством $\{a_n\} \in D$, то (см.стр.60)

$$\|B(z;\{a_n\})\|_{D_{p-1}^p} \le const\left(\sum_n \left(1-|a_n|^2\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отметим, что утверждение 2 при $p=1$ принадлежит С.Н. Мергеляну (см.[2]) и У. Рудину (см. [3]). Д. Гирела и Ж.А. Палаез показали, что (см. [4]) если для некоторого значения $p \in (0,1)$

$$\sum_n \left(1-|a_n|\right)^p < +\infty$$

и $B(z)$ – произведение Бляшке, порожденное множеством $\{a_n\}$, то

$$B(z) \in \prod_{0<q<+\infty} D_{q-1}^q .$$

В этой работе обобщается один пример С.А. Виноградова (см. [1], стр. 72,74). После доказывается, что в этом примере нули произведения Бляшке не могут стремиться к единичной окружности лишь по касательным путям. Это обстоятельство и обеспечивает принадлежность этого произведения Бляшке классу D_{p-1}^p. Главным результатом статьи является утверждение теоремы 2.

Основные результаты. Сначала докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Пусть $\{a_k\} \in D$ – последовательность, удовлетворяющая условию (B) Бляшке; $\{n_k\}$ – последовательность строго растущих натуральных чисел; $\{b_k\} = \{(\xi_k)_j\}$, $j = 0,1,\dots,n_k-1$ – последовательность тех точек $(\xi_k)_j$, для которых $((\xi_k)_j)^{n_k} = a_k$. Тогда функция $B(z) = \prod_k b_{a_k}(z^{n_k})$, где $b_{a_k}(z) = \dfrac{a_k - z}{1-\bar{a}_k z} \cdot \dfrac{|a_k|}{a_k}$, является произведением Бляшке.

Доказательство. Так как

$$B(z) = \prod_k \frac{a_k - z^{n_k}}{1-\bar{a}_k z^{n_k}} \cdot \frac{|a_k|}{a_k},$$

то по формуле Йенсена имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|B\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi=\log|B(0)|+\sum_{\left|(\xi_k)_j\right|\le r}\log\frac{r}{\left|(\xi_k)_j\right|}=$$

$$=\sum_{\left|(\xi_k)_j\right|>r}\log\left|(\xi_k)_j\right|+\sum_{\left|(\xi_k)_j\right|\le r}\log\left|(\xi_k)_j\right|+\sum_{\left|(\xi_k)_j\right|\le r}\log\frac{r}{\left|(\xi_k)_j\right|},$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|B\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi=\sum_{\left|(\xi_k)_j\right|>r}\log\left|(\xi_k)_j\right|+\log r\cdot n(r),\qquad(1)$$

где $n(r)$ – количество точек b_k, находящихся в круге $|z|\le r, r<1$.

Нетрудно установить, что

$$\lim_{r\to 1-}\left(\sum_{\left|(\xi_k)_j\right|>r}\log\left|(\xi_k)_j\right|\right)=0.\qquad(2)$$

Далее, так как $B(z;\{b_m\})$ есть произведение Бляшке, то (см [5], 51)

$$\lim_{r\to 1-}n(r)\log r=0.$$

Пользуясь этим равенством и равенством (2), из (1) получаем

$$\lim_{r\to 1-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|B\left(\left(re^{i\varphi}\right)^{n_k}\right)\right|d\varphi=0.$$

Так как это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы ограниченная аналитическая в единичном круге функция $B(z)$ являлась произведением Бляшке (см. [5], стр. 52), то утверждение леммы верно.

Замечание. Эта лемма отмечена в работе [1] (стр. 74) для тех натуральных чисел n_k, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k}=+\infty,$$

и для

$$a_k=1-2^{-(k+1)},\ k=1,2,\dots .$$

Лемма 2. Пусть последовательности $\{a_k\}, \{n(k)\}$ и $\{b_k\}$ определены, как в лемме 1, и пусть $a_k \xrightarrow[\kappa\to+\infty]{} e^{i\gamma_0}$ по касательному к единичной окружности пути. Тогда, если точка $e^{i\Theta_0}$ $(\Theta_0 \neq \gamma_0, \Theta_0 \in (0,2\pi))$ является предельной точкой множества $\{b_k\}$, то существует последовательность $\{b'_k\}$ последовательности $\{b_k\}$ такая, что

$$b'_k \xrightarrow[\kappa\to+\infty]{} e^{i\Theta_0},$$

находясь в некотором угле $\Omega_\sigma\left(e^{i\Theta_0}\right)$ Штольца.

Доказательство. Пусть $\varphi_k = \arg a_n$; $[x]_N$ – целая часть числа x; $\{x\}_f$ – дробная часть числа x и

$$m_k = \left[\frac{\Theta_0}{2\pi}\cdot n_k + \alpha_k \cdot n_k - \frac{\varphi_k}{2\pi}\right]_N,$$

где

$$\alpha_k = \frac{\left[\frac{\Theta_0}{2\pi}\cdot n_k + \alpha_k \cdot n_k - \frac{\varphi_k}{2\pi}\right]_f}{n_k} + \frac{o\left(1-\left|(\xi_k)_{m_k}\right|\right)}{2\pi n_k},\ \textit{когда}\ k \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\frac{\varphi_k + 2\pi\cdot m_k}{n_k} - \Theta_0 = o\left(1-\left|(\xi_k)_{m_k}\right|\right). \qquad (3)$$

Далее, так как

$$(\xi_k)_{m_k} = \left(a_k^{\frac{1}{n(k)}}\right)_{m_k} = |a_k|^{\frac{1}{n_k}}\left(\cos\frac{\varphi_k + 2\pi m_k}{n_k} + i\sin\frac{\varphi_k + 2\pi m_k}{n_k}\right),$$

то

$$\left|(\xi_k)_{m_k} - e^{i\Theta_0}\right|^2 = \left(1-\left|(\xi_k)_{m_k}\right|\right)^2 + 4\left|(\xi_k)_{m_k}\right|\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_k + 2\pi m_k}{n_k} - \Theta_0\right)\right].$$

Откуда, пользуясь (3), получаем

$$\left|(\xi_k)_{m_k} - e^{i\Theta_0}\right|^2 = \left(1-\left|(\xi_k)_{om_k}\right|\right)^2 + 4\left|(\xi_k)_{m_k}\right|\sin^2\left[\frac{1}{2}o\left(1-\left|(\xi_k)_{m_k}\right|\right)\right].$$

Отсюда следует справедливость следующего неравенства:

$$\left|(\xi_k)_{m_k} - e^{i\Theta_0}\right| < \sigma \cdot \left(1 - \left|(\xi_k)_{m_k}\right|\right)$$

для любого $\sigma \in [1,+\infty)$. Значит, подпоследовательность $\{b'_k\} = \{(\xi_k)_{m_k}\}$ последовательности $\{b_k\}$ находится в угле $\Omega_\sigma\left(e^{i\Theta_0}\right)$Штольца для любого $\sigma \in [1,+\infty)$.

Теорема 1. Пусть $\{a_k\} \in D$ такая, что $\sum_p (1-|a_k|)^p < +\infty$, $p \in (0,1)$, а последовательности $\{n_k\}$ и $\{b_k\}$ определены, как в лемме 1. Тогда $B(z) = B(z;\{b_m\}) \in D^p_{p-1}$ для любого значения $p \in (0,+\infty)$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3.11 работы [1] (стр. 74), где это утверждение доказано, когда $a_k = 1 - 2^{-(k+1)}$, а n_k - очень быстро растущая последовательность.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{a_n\} \in D$ удовлетворяет условию (B)- Бляшке, скапливается к единичной окружности лишь по касательным путям и для любого значения $q \in (0,1)$:

$$\sum_q (1-|a_n|)^q = +\infty.$$

Тогда произведение $B(z)$–Бляшке, порожденное множеством $\{a_n\}$, не принадлежит $\bigcup_{p\in(0,1)} D^p_{p-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Виноградов С.А.** Умножение и деление в пространстве аналитических функций с производной суммируемой по площади и близких к нему пространствах // Зап. науч. сем. ПОМИ.–1995.– Том 222. –С. 45–47.
2. **Мергелян С.Н.** Об одном интеграле, связанном с аналитическими функциями // Известия АН СССР. Сер. матем. –1951.–15.– С. 395–400.
3. **Rudin W.** The radial variation of analytic function //Duki. Math. j. –1955.–22, N 2.–P. 235–242.
4. **Girela O. and Pelaez J.A.** Boundary behavior of analytic functions in spaces of dirichlet type // Hindawi Publishing Corporation journal of Inequalities and Applications. –2006. –Volume 9. –P.1–12.
5. **Коллингвуд Э., Ловатер А.** Теория предельных множеств. –М.: Мир, 1971. –312 с.

Ռ.Վ. ԴԱԼԼԱՔՅԱՆ

ՇՈՇԱՓՈՂ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՄԻԱՎՈՐ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻՆ ՄՈՏԵՑՈՂ ԶՐՈՆԵՐՈՎ ԲԼՅԱՇԿԵԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ընդհանրացվում է Ս.Ա. Վինոգրադովի մի օրինակ, այնուհետև ստացվում է, որ այդ օրինակում կառուցված Բլյաշկեի արտադրյալի զրոները միայն շոշափող ուղղություններով չեն կարող մոտենալ միավոր շրջանագծին: Այս օրինակը հուշում է, որ թեորեմներ 1-ի և 2-ի պնդումները կարող են տեղի ունենալ միաժամանակ:

Առանցքային բառեր. Բլյաշկեի արտադրյալ, Շտոլցի անկյուն, շոշափող ուղղություններով շրջանագծին մոտեցող բազմություն, Յենսենի բանաձև, D^p_{p-1}, H^p, B ֆունկցիոնալ դասեր:

R.V. DALLAKYAN

BLASCHKE’S PRODUCTS, WHOSE ZEROS APPROACH A UNIT CIRCLE BY THE TANGENT DIRECTIONS

First, an example of S.A. Vinogradov is generalized. Then it is proved that zeros of Blaschke’s product constructed in that example can’t approach a unit circle only by tangent directions. This example suggests that statements of theorems 1 and 2 can take place at the same time.

Keywords: Blaschke’s product, angle of Stoltz, approach to a unit circle by the tangent directions, Jensen’s formula, functional classes D^p_{p-1}, H^p, B.