УДК 621.3.019, 62.52

С.Ш. БАЛАСАНЯН, В.С. БАЛАСАНЯН, Э.М. ГЕВОРГЯН

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ

(*Капан*)

Рассмотрены задачи оптимального резервирования высоконадежных сложных компьютерных систем кратковременного действия. Получены приближенные решения указанных задач методом неопределенных множителей Лагранжа, которые могут быть использованы при ориентировочных расчетах на этапе проектирования сложных компьютерных систем.

Ключевые слова: надежность, эффективность функционирования, двойственная задача, оптимальное резервирование, сложная система, метод множителей Лагранжа.

Введение. Благодаря структурной и функциональной избыточности сложные компьютерные системы обладают многими работоспособными состояниями. В отличие от бинарных систем, обладающих лишь двумя возможными состояниями (работоспособным и неработоспособным), для таких систем (*multi-state systems*) [1, 2] практически невозможно определить общепринятое понятие отказа. Поэтому для систем со многими состояниями вместо надежности вводится понятие технической эффективности, оценка которого производится с помощью специально выбранных показателей эффективности, учитывающих последствие влияния отказов элементов системы на качество ее функционирования.

Методологической основой существующих методов оценки и исследования эффективности функционирования сложных систем со многими состояниями служит концепция системного подхода. Эта концепция в данном случае проявляется в том, что показатель эффективности рассматривается как функционал от процесса функционирования системы.

В рамках указанного подхода оценка эффективности функционирования сложных систем основывается на использовании модели процесса изменения работоспособности элементов системы. Ее сущность заключается в следующем. Формально каждый элемент $E_i^0\ (i=\overline{1,n})$ системы в любой момент времени может находиться в одном из возможных состояний $y_i^0(t)\in Y_i^0$, каждое из которых характеризуется определенным уровнем работоспособности. Совокупность состояний элементов $y^0(t)=\left(y_1^0(t),y_2^0(t),\dots,y_n^0(t)\right)$ в произвольный момент времени однозначно определяет состояние системы.

С течением времени под влиянием внешних и внутренних случайных факторов элементы системы переходят из одного состояния в другое. В результате происходит последовательная смена состояний системы в целом.

Случайный *n*-мерный процесс $Y^0(t)=\left\{y^0(t)\right\}$ рассматривается как формализованный процесс изменения работоспособности элементов системы и описывает ее поведение во времени. Каждой реализации $y^0(t)$ процесса $Y^0(t)$ соответствует определенная траектория в пространстве состояний системы $Y^0=\prod_{i=1}^{n}Y_i^0$. Если обозначить через $P_{y^0}\left(t,t+\theta\right)$ вероятность того, что формализованный процесс $Y^0(t)$ в интервале времени $\left[t,t+\theta\right]$ имел реализацию $y^0\left(t,t+\theta\right)\in Y^0(t,t+\theta)$, а через $\varepsilon_{y^0}\left(t,\theta\right)$ – условный показатель эффективности функционирования системы для этой реализации, то показатель эффективности функционирования системы может быть определен как математическое ожидание условного показателя $\varepsilon_{y^0}\left(t,\theta\right)$:

$$E\left(t,\theta\right)=\int\limits_{Y^0(t,t+\theta)}\varepsilon_{y^0}\left(t,\theta\right)dP_{y^0}\left(t,t+\theta\right). \qquad (1)$$

Несмотря на кажущуюся простоту записи, соотношение (1) малопригодно для расчетов из-за чрезмерной трудности определения $\varepsilon_0\left(t,\theta\right),P_y\left(t,t+\theta\right)$ и может быть использовано лишь для оценки эффективности функционирования систем с небольшим числом состояний. Поэтому для оценки и исследования сложных систем с большим числом состояний применяется метод имитационного моделирования.

Сравнительно хорошо разработаны аналитические методы оценки эффективности некоторых частных типов сложных систем кратковременного действия [2]. Особенности этих систем позволили получить достаточно компактные расчетные формулы для оценки эффективности их функционирования.

Постановка задачи и методы иседования. При проектировании высоконадежных сложных компьютерных систем с использованием резервирования возникают задачи оптимального резервирования [3-6], сущность которых заключается в определении чисел $x_i, i=\overline{1,n}$ элементов i-го типа, максимизирующих значение показателя эффективности функционирования сложной системы при ограничении, наложенном на технико-экономический показатель (стоимость, вес, объем и т.д.) системы, или минимизирующих технико-экономический показатель системы при заданном значении показателя эффективности функционирования системы.

Рассмотрим некоторую сложную компьютерную систему кратковременного действия [1], состоящую из n нерезервированных элементов. Допустим, что каждый элемент может находиться только в двух возможных состояниях: в состоянии работоспособности и в состоянии отказа. Эта система имеет конечное число несовместимых состояний:

S_0 - состояние системы, когда все элементы работоспособны;

S_i - состояние системы, когда отказал только i-й элемент ($i = \overline{1,n}$);

$S_{i,j}$ - состояние системы, когда отказали только i-й и j-й элементы ($i < j;\ i, j = \overline{1,n}$);

$S_{i,j,\ldots,m}$ - состояние системы, когда отказала совокупность только $i, j, \ldots, m$ элементов ($i < j < \ldots < m;\ i, j, \ldots, m = \overline{1,n}$);

$S_{1,2,\ldots,n}$ - состояние системы, когда отказали все элементы системы.

Пусть вероятность состояний $S_0, S_i, S_{i,j}, S_{i,j,\ldots,m}, S_{1,2,\ldots,n}$ и показатели эффективности функционирования системы для этих состояний соответственно равны $P_0, P_i, P_{i,j}, P_{i,j,\ldots,m}, P_{1,2,\ldots,n}$, $\varepsilon_0, \varepsilon_i, \varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i,j,\ldots,m}, \varepsilon_{1,2,\ldots,n}$. Тогда эффективность функционирования системы определится как математическое ожидание показателя эффективности $\widetilde{\varepsilon}$ по формуле

$$\varepsilon = M\left[\widetilde{\varepsilon}\right] = \varepsilon_0 P_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i P_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \varepsilon_{i,j} P_{i,j} + \ldots + \sum_{\substack{i \neq j,..m=1 \\ i<j<\ldots<m}}^{n} \varepsilon_{i,j,\ldots,m} P_{i,j,\ldots,m} + \varepsilon_{1,2,\ldots,n} P_{1,2,\ldots,n}. \quad (2)$$

Предположим, что отказы элементов системы взаимно независимы. Тогда можно написать

$$P_0 = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - q_k\right),$$

$$P_i = q_i \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \left(1 - q_k\right),$$

$$P_{i,j} = q_i q_j \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} \left(1 - q_k\right), \quad (3)$$

$$P_{i,j,\ldots,m} = q_i q_j \ldots q_m \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j,\ldots,m}}^{n} \left(1 - q_k\right),$$

$$P_{1,2,...,n} = \prod_{k=1}^{n} q_k \ ,$$

где q_i - вероятность отказа i - го элемента.

Требуется:

1) максимизировать эффективность функционирования сложной системы путем поэлементного нагруженного резервирования при ограничении, наложенном на технико-экономический показатель системы;

2) минимизировать технико-экономический показатель системы при заданном значении показателя эффективности ее функционирования.

При поэлементном нагруженном резервировании вероятности состояний системы определяются следующими выражениями:

$$P_0 = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - q_k^{x_k}\right),$$

$$P_i = q_i^{x_i} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \left(1 - q_k^{x_k}\right),$$

$$P_{i,j} = q_i^{x_i} q_j^{x_j} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} \left(1 - q_k^{x_k}\right), \tag{4}$$

$$P_{i,j,...,m} = q_i^{x_i} q_j^{x_j} ... q_m^{x_m} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j,...,m}}^{n} \left(1 - q_k^{x_k}\right),$$

$$P_{1,2,...,n} = \prod_{k=1}^{n} q_k^{x_k} \ ,$$

где x_i - общее число элементов i - го типа.

Для случая высоконадежной системы, т.е. когда выполняется условие $q_i^{x_i} << 1/n$, вместо (2) можно записать приближенно

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{n} q_i^{x_i} (\varepsilon_0 - \varepsilon_i) \ . \tag{5}$$

Тогда могут быть сформулированы две следующие задачи:

$$1) \max \Phi\left(x_1, ..., x_n\right) = \max_{x_i} \left(\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{n} q_i^{x_i} (\varepsilon_0 - \varepsilon_i) \right) \tag{6}$$

при условии, что $\sum_{i=1}^{n} d_i x_i = D^*;\ i = \overline{1,n}$;

$$2)\ \min \Phi(x_1,...,x_n) = \min_{x_i} \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \tag{7}$$

при условии, что $\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{n} q_i^{x_i} (\varepsilon_0 - \varepsilon_i) = \varepsilon^*;\ i = \overline{1,n}$,

где d_i - технико-экономический показатель одного элемента i -го типа; D^* -технико-экономический показатель системы; ε^* - заданное значение показателя эффективности функционирования системы.

Эти двойственные задачи оптимального резервирования можно решить различными методами, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки.

Если рассмотреть Φ как непрерывную функцию от x, то поставленные задачи первоначально можно решить с помощью неопределенных множителей Лагранжа и, получив истинные решения x для каждого элемента, округлить их до ближайших целых чисел. Если необходимы более точные значения x_i, то для их определения нужно исследовать ближайшие к x_i слева и справа (не меньше единицы) целые числа $[x_i]$ и $[x_i + 1]$, из них выбрать те, при которых $\Phi(x_1,..., x_n)$ имеет наибольшее значение в задаче 1 и наименьшее значение в задаче 2.

Решение задачи 1 сводится к решению следующей системы уравнений с $n+1$ неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{n} q_i^{x_i} (\varepsilon_0 - \varepsilon_i) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} d_i x_i - D^*\right)\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} d_i x_i = D^*. \end{cases} \tag{8}$$

Решение (8) имеет вид

$$x_i = -(1/\ln q_i)\cdot\left(1\Big/\sum_{i=1}^{n} a_i\left(D^* - \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(\varepsilon_0 - \varepsilon_i/a_i)\right) + \ln(\varepsilon_0 - \varepsilon_i/a_i)\right),$$

$$a_i = -(d_i / \ln q_i),\ i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Для решения задачи 2 составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i x_i + \lambda \cdot \left(\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{n} q_i^{x_i}(\varepsilon_0 - \varepsilon_i) - \varepsilon^*\right)\right) = 0, \\ \varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{n} q_i^{x_i}(\varepsilon_0 - \varepsilon_i) = \varepsilon^*; \; i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{10}$$

Решая (10), получим

$$x_i = 1 \Bigg/ \left(-\ln q_i \left(\ln\left((\varepsilon_0 - \varepsilon_i)/a_i\right) - \ln\left(\varepsilon_0 - \varepsilon^* \Big/ \sum_{i=1}^{n} a_i\right)\right)\right). \tag{11}$$

Если показатель эффективности функционирования системы имеет денежное выражение, то можно поставить следующую задачу, являющуюся частным случаем задачи 1:

$$\max_{x_i}\left(\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{n} q_i^{x_i}(\varepsilon_0 - \varepsilon_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right), \tag{12}$$

где c_i - стоимость одного элемента i -го типа.

Дифференцируя (11) по x_i и приравнивая ее к нулю, находим

$$x_i = -(1/\ln q_i) \cdot \ln\left((\varepsilon_0 - \varepsilon_i)/a_i\right), \tag{13}$$

где через a_i обозначено выражение ($-c_i/\ln q_i$).

На практике часто возникает задача оптимального резервирования, когда из m элементов сложной системы возможно зарезервировать только n элементов. Учитывая сделанные допущения для эффективности функционирования сложной системы, зарезервированной способом поэлементного нагруженного резервирования, приближенно получим

$$\varepsilon_m = \prod_{j=n+1}^{m}\left(1 - q_j\right) \cdot \left(\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{n} q_i^{x_i}(\varepsilon_0 - \varepsilon_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} q_i^{x_i}\right) \cdot \sum_{k=n+1}^{m} \varepsilon_k q_k \prod_{\substack{j=n+1 \\ j \neq k}}^{m}\left(1 - q_j\right)\right). \tag{14}$$

Требуется решить задачи типа 1 и 2, сформулированные для данного случая, т.е. когда эффективность определяется выражением (14). Решив эти задачи таким же образом, что и задачи 1и 2, соответственно получим

$$x_i = -(1/\ln q_i)\cdot\left(1\Big/\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot\left(D^* - \sum_{i=1}^{n} a_i \ln\left(\left(\varepsilon_{0m} - \varepsilon_i \prod_{j=n+1}^{m}\left(1-q_j\right)\right)\Big/ a_i\right)\right) + \right. \tag{15}$$
$$\left. + \ln\left(\varepsilon_{0m} - \varepsilon_i \prod_{j=n+1}^{m}\left(1-q_j\right)\Big/ a_i\right)\right),$$

$$x_i = -(1/\ln q_i)\cdot\left(\ln\left(\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_i \prod_{j=n+1}^{m}\left(1-q_j\right)\right)\Big/ a_i\right) - \ln\left(\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_m^*\right)\Big/\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\right), \tag{16}$$

где

$$\varepsilon_{0m} = \varepsilon_0 \prod_{j=n+1}^{m}\left(1-q_j\right) + \sum_{k=n+1}^{m} \varepsilon_k q_k \cdot \prod_{\substack{j=n+1 \\ j\neq k}}^{m}\left(1-q_j\right). \tag{17}$$

Заключение. Методом неопределенных множителей Лагранжа получены приближенные решения задачи оптимального резервирования высоконадежных сложных компьютерных систем кратковременного действия. Следует отметить, что округление значений $x_i, i=\overline{1,n}$ до ближайших целых чисел существенно не влияет на точность решения, поскольку сами по себе d_i, $\varepsilon_0, \varepsilon_i$ также являются величинами более или менее приближенными. Поэтому полученные результаты могут быть с успехом использованы при ориентировочных расчетах. При решении же рассмотренных задач методом динамического программирования полученные решения можно использовать в качестве опорного. Область поиска при этом значительно сужается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lisnianski A., Levitin G.** Multi-state system reliability. Assessment, optitization and applications.- World Scientific, 2003.- 358 p.
2. **Баласанян С.Ш.** Стратифицированная модель для оценки и анализа эффективности функционирования сложных технологических систем со многими состояниями // Известия ТПУ.-2011.-Т.318, №5.-С.25-30.
3. **Kim Heungseob, Kim Pansoo**. Reliability Engineering and System Safety.-2017. Vol.159 (C).- P. 153-160.
4. **Zhigang Tian, Ming J. Zuo, Hongzhong Huang.** Reliability-Redundancy Allocation for Multi-State Series-Parallel Systems // IEEE Transactions on Reliability.- 2008.-Vol 57, issue 2 .- P. 303 – 310.

5. **Chatwattanasiri Nida, Coit David W., Wattanapongsakorn N**. System redundancy optimization with uncertain stress-based component reliability: Miniтization of regret //Reliability Engineering and System Safety.- 2016.-Vol. 154(C).- P. 73-83.
6. **Coit, David W. & Zio, Enrico**. The evolution of system reliability optimization// Reliability Engineering and System Safety.- 2019.- Vol. 192(C).- P. 63-100.

Ս.Շ. ԲԱԼԱՍԱՆՅԱՆ, Վ.Ս. ԲԱԼԱՍԱՆՅԱՆ, Հ.Մ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԲԱՐԴ ՔՈՄՓՅՈՒԹԵՐԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՊԱՀՈՒՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄ

Դիտարկված են կարճատև գործունեության բարդ քոմփյութերային համակարգերի օպտիմալ պահուստավորման խնդիրներ: Դրանց համար Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչների մեթոդով ստացվել են մոտավոր լուծումներ, որոնք կարող են օգտագործվել բարդ քոմփյութերային համակարգերի նախագծման փուլում կողմնորոշիչ հաշվարկների դեպքում:

Առանցքային բառեր. հուսալիություն, գործունեության արդյունավետություն, երկակի խնդիր, օպտիմալ պահուստավորում, բարդ համակարգ, Լագրանժի բազմապատկիչների մեթոդ:

S.SH. BALASANYAN, V.S. BALASANYAN, H.T. GEVORGYAN

AN APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM OF COMPLEX COMPUTER SYSTEMS OPTIMAL REDUNDANCY

Problems on optimal redundancy of short-term action complex computer systems are considered. The approximate solutions of these problems are obtained by a method of uncertain multipliers of Lagrange, which can be used at rough calculations in complex computer system designing.

Keywords: reliability, functioning efficiency, dual problem, optimal redundancy, complex system, Lagrange multiplier method.