

А.В. ЭЛОЯН, Д.К. КАРАПЕТЯН

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО ЖЕСТКОСТИ УПРУГОЙ  
БАЛКИ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ  
НАГРУЗКИ**

*(Гюмри)*

Рассматривается задача определения оптимального расположения опор упругой балки при изгибе под действием переменной нагрузки, обеспечивающей наименьшее значение наибольшего прогиба балки.

**Ключевые слова:** упругая балка, прогиб, оптимальное проектирование.

**Введение.** Упругие балки имеют широкое применение в современном строительном деле, машиностроении, судостроении, самолетостроении и в других областях современной техники.

В современных конструкциях большое практическое применение имеют упругие изотропные балки, находящиеся под переменной распределенной нагрузкой. В области исследования прочности и устойчивости балки следует отметить работы Амбарцумяна С.А., Тимошенко С.П. и др. В области оптимального проектирования тонкостенных элементов конструкций, а именно - в задачах изгиба пластинки, недостаточно исследованы вопросы определения оптимального расположения опор. Эти вопросы рассмотрены в работах Гнуни В.Ц. и Элояна А.В. [1, 2].

**Постановка задачи и методы исследования.** Рассматривается задача определения оптимального расположения опор упругой балки при изгибе под действием переменной нагрузки, обеспечивающей наименьшее значение наибольшего прогиба балки.

Пусть упругая балка длиной  $l$  отнесена к прямоугольной системе декартовых координат  $Oxuz$  так, что координатная плоскость  $z = 0$  совпадает со срединной плоскостью балки, начало координат совпадает с правой опорой. От середины балки опоры удалены на расстояниях  $c_1$  и  $c_2$  (рис.).

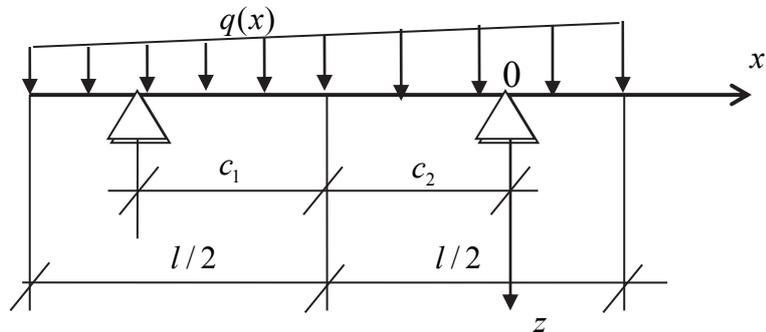


Рис. Расчетная схема балки

Если балка изгибается под действием внешней неравномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q(x)$ , то можно предположить, что имеет место изгиб балки по цилиндрической поверхности и прогиб  $w = w(x)$ .

Дифференциальное уравнение изгиба балки постоянной толщины  $h$ , нагруженной нормально распределенной переменной по длине балки нагрузкой  $q(x) = q_0 \left(1 + \frac{ax}{\alpha}\right)$ , имеет вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q_0 + a \frac{x}{\alpha}, \quad (1)$$

где  $a = \frac{q}{q_0}$ ;  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  - жесткость на изгиб;  $E$  - модуль упругости;  $w = w(x)$  - прогиб длинной балки;  $\nu$  - коэффициент Пуассона материала балки.

Если нагрузка по длине балки распределена несимметрично, то уравнение (1) можно отдельно рассматривать на соответствующих отрезках, при этом

$$w_i(x) = \begin{cases} w_1(x) = \text{при } -(c_1 + c_2) < x < 0, \\ w_2(x) = \text{при } 0 < x \leq (0.5a - c_1), \\ w_3(x) = \text{при } -(0.5a + c_1) \leq x < -(c_1 + c_2). \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что при произвольном распределении нагрузки по ширине задачу оптимизации необходимо рассматривать с двумя параметрами оптимизации  $c_1$  и  $c_2$ .

При этом должны удовлетворяться следующие условия на опорах:

$$w_1(x) = w_2(x) = 0, \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}, M_{xx}^{(1)} = M_{xx}^{(2)} \text{ при } x = 0;$$

$$w_1(x) = w_2(x) = 0, \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}, M_{xx}^{(1)} = M_{xx}^{(2)} \text{ при } x = -(c_1 + c_2). \quad (3)$$

На длинных краях балки соответственно должны быть удовлетворены условия свободного края, где

$$M_{xx}^{(2)} = 0, T_{xz}^{(2)} = 0 \text{ при } x = -0,5a - c_1, \quad (4)$$

$$M_{xx}^{(3)} = 0, T_{xz}^{(3)} = 0 \text{ при } x = 0,5a - c_2,$$

$$M_{xx} = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, T_{xz} = \frac{dM_{xx}}{dx} = -D \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (5)$$

- соответственно изгибающий момент и поперечное усилие в сечениях  $x = const$ .

Решение (1) получаем в виде

$$w_i = \frac{q_0 a^4}{24D} \left(1 + \frac{a\bar{x}}{5}\right) \bar{x}^4 + \frac{1}{6} a_{3i} \bar{x}^3 + \frac{1}{2} a_{2i} \bar{x}^2 + a_{1i} \bar{x} + a_{0i}, \quad (6)$$

где  $i=1$  при  $x \in (-a_1 - a_2); 0$ ,  $i=2$  при  $x \in (0; 0,5a - a_1)$ ,  $i=3$  при  $x \in (-0,5 - a_1; a_1 - a_2)$ .

Здесь введены обозначения для безразмерных координат  $\bar{x}$  и параметров оптимизации  $\alpha_i$ :

$$\bar{x} = \frac{x}{a} \quad a_i = \frac{c_i}{a} \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Удовлетворяя восьми условиям на опорах (3) и четырем условиям на свободных концах балки (4), получаем систему из двенадцати уравнений для определения двенадцати постоянных:  $a_{ik} (k = 0, 1, 2, 3)$ .

Подстановкой значений постоянных  $a_{ik}$  в (6) получаются формулы для искомого  $w_i(x)$ , удовлетворяющих условиям (3), (4).

Окончательно для прогиба балки получаем

$$w_1 = \frac{q_0 a^4 \bar{x}}{24D} \left[ \left(1 + \frac{a\bar{x}}{5}\right) \bar{x}^3 + \frac{4\bar{x}^2}{3} [(0,5 - a_1)^2 (0,5 + a(0,5 - a_1))] \right]:$$

$$: (a_1 + a_2) - (0,5 + a_1)^2 (0,5 - a(0,5 + a_1)): (a_1 + a_2) + (0,5 + a_1) \times$$

$$\times (1 - 0,5a(0,5 + a_1)) + 4\bar{x}(0,5a - a_1)^2 (0,5 + a(0,5 - a_1) +$$

$$+ [(a_1 + a_2)^3 (1 + 0,2(a_1 + a_2)) - 4(a_1 + a_2)^2 (1 - 0,5a(0,5 + a_1)(0,5 + a_1))] +$$

$$+ 4(a_1 + a_2)^2 (0,5 + a_1)^2 (0,5 - a(0,5 + a_1) + 8(a_1 + a_2)(0,5 - a_1)^2) \times$$

$$\times (0,5 + a(0,5 - a_1)] / 3 \text{ при } \bar{x} \in (-a_1 - a_2; 0); \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
w_2 = & \frac{q_0 a^4 \bar{x}}{24D} \left[ \left( 1 + \frac{a\bar{x}}{5} \right) \bar{x}^3 - 4\bar{x}^2 [(0.5 - a_1)^2 (1 + 0.5a(0.5 - a_1))] + \right. \\
& + 2\bar{x}(0.5 - a_1)^2 (0.5 + a(0.5 - a_1)): 3 + (a_1 + a_2)^3 (1 + 0.2(a_1 + a_2)) - \\
& - 4(a_1 + a_2)^2 (1 - 0.5a(0.5 + a_1)(0.5 + a_1)) + 4(a_1 + a_2)^2 (0.5 + a_1)^2 \times \\
& \times \left. [(0.5 - a(0.5 - a_1)): 3 + 8(a_1 + a_2)(1 - 0.5a(0.5 + a_1)(0.5 - a_1)): 3] \right]
\end{aligned}$$

при

$$\bar{x} \in (0; 0.5 - a_1); \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
w_3 = & \frac{q_0 a^4 \bar{x}}{24D} \left[ \left( 1 + \frac{a\bar{x}}{5} \right) \bar{x}^3 + 4\bar{x}^2 [(0.5 + a_1)(1 - 0.5a(0.5 + a_1))] + \right. \\
& + 12\bar{x}(0.5 + a_1)^2 (0.5 - a(0.5 + a_1)): 3 + (a_1 + a_2)^3 (1 + 0.2(a_1 + a_2)) - \\
& - 4(a_1 + a_2)^2 (1 - 0.5a(0.5 + a_1)(0.5 + a_1)) + 16(a_1 + a_2)(0.5 + a_1)^2 \times \\
& \times \left. [(0.5 - a(0.5 + a_1)): 3 - 4(a_1 + a_2)(0.5 + a(0.5 + a_1)(0.5 - a_1)): 3] \right]
\end{aligned}$$

при

$$\bar{x} \in (0.5 - a_1; -a_1 - a_2). \quad (10)$$

Отметим, что, как видно из (8), (9), (10), при переменной по длине балки нагрузке прогиб балки зависит от параметров  $a_1$  и  $a_2$ .

Имея значение  $w_i(\bar{x})$ , можно рассматривать следующую оптимизационную задачу: для заданного  $a$  найти:  $\alpha_1, \alpha_2$  так, что

$$m_{i,x} \overline{w}(\bar{x}, \alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{\alpha_1, \alpha_2} \min,$$

где

$$\alpha_i \in [0; 0.5], i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Очевидно, прогибы балки  $\overline{w}_2(x)$  и  $\overline{w}_3(x)$  принимают наибольшее значение на краях балки.

В случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  и  $\alpha_1 \in 2$ :

$$\overline{w}_1(\bar{x}) \equiv 0, m_{\bar{x}} \overline{w}_2(0.5) = 0.837,$$

$$m_{\bar{x}} \overline{w}_3(x) = \overline{w}_3(-0.5) = 0.63.$$

В случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$  и  $\alpha_1 \in 2$ :

$$\min_{\bar{x}} \max_i \bar{w}_1(\bar{x}) = 1.0. \bar{w}_2(\bar{x}) = \bar{w}_3(\bar{x}).$$

Отметим, что при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$  получается балка, два края которой  $x = -l$ ;  $x = 0$  шарнирно оперты, а при  $c_1 = c_2 = 0$  получаются две консольные балки, заделанные в точке  $x = 0$ .

Здесь введено безразмерное значение для прогиба балки  $w$ :

$$\bar{w}_i(\bar{x}) = \frac{384D}{5q_0a^4} w_i(\bar{x}), \quad (12)$$

где  $5qa^4/384D$  - наибольший прогиб шарнирно опертой по краям балки при  $\alpha_1 \in 2$ .

**Результаты исследования.** На основе численного решения задачи приходим к выводу, что наилучшие варианты расположения опор при  $\alpha_1 \in 2$  получаются при  $\alpha_1^* = 0.255$ ,  $\alpha_2^* = 0.296$ .  $\alpha_1^* = 0.255$ ,  $\alpha_2^* = 0.296$ .

Таким образом, при  $\alpha = 2$ :

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2} \max_i \bar{w}_i(\bar{x}, \alpha_1, \alpha_2) = 0.208.$$

В рассмотренных случаях  $\alpha_1 \in 2$  при оптимальном расположении опор  $\alpha_1 = \alpha_1^*$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2^*$  наибольший прогиб по длине упругой балки в 47 раз меньше наибольшего прогиба шарнирно опертой по длинным краям балки. Необходимо отметить также, что в случае оптимального проекта:

$$\bar{w}_1(x) = \bar{w}_2(x) = \bar{w}_3(x).$$

Отметим, что наибольшее значение  $\bar{w}_1(x)$  прогиба части балки между опорами для случая  $\alpha_1 \in 2$  достигается при  $\bar{x} = -0.425$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гнуни В.Ц.** Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки // Сб. -Ер.: Изд-во ЕГУ, 1997.- С.114-117.
2. **Элоян А.В.** Оптимальный выбор расположения опор в упругой изотропной прямоугольной пластинке при воздействии поперечной нагрузки и температурного поля // Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. -2013. -Т.66, N4. -С.17-22.

Ա.Վ. ԷԼՈՅԱՆ, Ջ.Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

**ԾՈՄԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԵԾԱՆԻ՝ ԸՍՏ ԿՈՇՏՈՒԹՅԱՆ  
ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱՓ ԲԵՌՆՎԱԾՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ**

Դիտարկվում է առաձգական հեծանի երկայնքով հենարանների օպտիմալ դիրքի որոշման խնդիրը փոփոխվող բեռի ազդեցության տակ՝ ապահովելով հեծանի ամենամեծ ճկվածքի ամենափոքր արժեքը:

*Առանցքային բառեր.* առաձգական հեծան, ճկվածք, օպտիմալ նախագծում:

A.V. ELOYAN, J.K. KARAPETYAN

**OPTIMAL DESIGN OF ELASTIC BEAM STIFFNESS IN THE PROBLEM  
OF BEAM BENDING UNDER VARIABLE LOAD**

The problem of determining the optimal location of supports along an elastic beam during bending under the action of a variable load, ensuring the lowest value of the greatest deflection of the beam, is considered.

*Keywords:* elastic beam, bending, optimal design.

УДК 699.841

Ր.Ա. ԱՏԱԲԵԿՅԱՆ, Լ.Ր. ԱՏԱԲԵԿՅԱՆ, Մ.Ր. ՏԱԱԿՅԱՆ

**ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ ПОД ПОДОШВОЙ ФУНДАМЕНТОВ НА  
СТЕПЕНЬ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

*(Վանաձոր)*

Известно, что на некоторой глубине от поверхности земли интенсивность сейсмических колебаний меньше, чем на свободной поверхности грунта, что обусловлено скользящим влиянием давления грунта. Данные инженерно-сейсмометрических станций, полученные при землетрясениях, также свидетельствуют о значительном расхождении ускорений фундаментов и на свободной поверхности грунта. Существуют также многочисленные результаты одновременной регистрации перемещений и ускорений грунтов на разных глубинах при землетрясении. Несмотря на очевидное влияние давления на проявление интенсивности сейсмических колебаний, этот фактор не учитывается в расчетах зданий и сооружений на сейсмическое воздействие. С целью количественной оценки влияния внешнего давления на степень сейсмических воздействий нами проведены экспериментальные исследования на упрощенной модели многоэтажного каркасного здания, изготовленного при условии равенства ускорений.

*Ключевые слова:* давление на грунт, смещение, ускорение, сейсмическая нагрузка.