И.А. КАРАПЕТЯН, К.И. КАРАПЕТЯН

О ПОЛНЫХ ШАПКАХ В ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ $\mathrm{PG}(\boldsymbol{n}, 3)$

Рассматривается задача нахождения размеров наибольшей и наименьшей шапок в проективной геометрии $\mathrm{PG}(\mathrm{n}, 3)$ на поле $F_3 = \{0, 1, 2\}$. Шапка - это набор точек, нкакие три из которых не лежат на одной прямой. Разработаны две новые рекуррентные конструкции построения полных шапок. Заметим, что построенные шапки для некоторых n имеют наибольшую возможную мощность.

Ключевые слова*:* аффинная геометрия, проективная геометрия, точки, шапки, полные шапки.

УДК 515.172.22

Р.В. ДАЛЛАКЯН

О ЗАДАЧЕ ВЛОЖЕНИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССАХ D_{p-1}^{p}

(Ванадзор)

Сначала доказывается, что любая функция из функционального класса D_{p-1}^{p} $(0 < p < \infty)$, представимая лакунарным рядом, принадлежит малому классу Блоха $B_0 \subset B$. Для функций же из $D_{p-1}^{p} \bigcap B$ задача о вложении решена. Далее приводится основной результат: теорема о вложении функциональных классов D_{p-1}^{p}.

Ключевые слова: лакунарные ряды, пространство со смешанной нормой, пространства Харди, Джрбашяна-Бергмана, Блоха.

Введение. Пусть D - единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $H(D)$ - множество голоморфных в D функций. Далее, пусть для $z = re^{i\varphi} \in D$

$$M_p(r, f) = \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < +\infty, \\ \sup\limits_{0 \le \varphi \le 2\pi} \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right|, & p = +\infty. \end{cases}$$

Семейство голоморфных функций из $H(D)$, для которых

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} M_p(r,f) < +\infty,$$

называется классом H^p Харди. Пространство со смешанной нормой $H(p,q,\alpha)$ $(0 < p,q < +\infty,\ \alpha > 0)$ - это множество тех функций из $H(D)$, для которых конечна квазинорма:

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(r,f)\,dr \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < +\infty, \\ \sup\limits_{0 \le r < 1} M_p(r,f), & q = +\infty. \end{cases}.$$

Функциональный класс A_α^p $(0 < p < +\infty,\ \alpha > -1)$ Джрбашяна-Бергмана определяется как множество тех функций f из $H(D)$, для которых

$$\|f\|_{A_\alpha^p} = \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)^\alpha \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right|^p d\varphi dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \ .$$

Класс тех функций, для которых $f' \in A_\alpha^p$, обозначается через D_α^p.

Последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ называется лакунарной (по Адамару), если существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что $\dfrac{m_{k+1}}{m_k} \ge \lambda$ для всех $k = 0,1,2,\ldots$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty a_k z^{m_k}$ называется лакунарным.

Следующая теорема К.Л. Аветисяна характеризует лакунарные ряды в пространствах со смешанной нормой.

Теорема ([1], теорема 1). Пусть $0 < q < +\infty$, $\alpha > 0$; $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ - произвольная лакунарная последовательность и $f(z)$- голоморфная в D

функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

а) $f\in H(\infty,q,\alpha)$; б) $f\in H(p,q,\alpha)$ для некоторого $p\in(0,\infty)$;

в) $f\in H(p,q,\alpha)$ для всех $p\in(0,\infty)$; г) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^q}{m_k^{q\alpha}}<+\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{\infty,q,\alpha}\approx\|f\|_{p,q,\alpha}\approx\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^q}{m_k^{q\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Функция f из $H(D)$ принадлежит классу B -Блоха, если

$$\|f\|_B=|f(0)|+\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|<+\infty .$$

f из $H(D)$ принадлежит малому классу B_0–Блоха, если

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|=0.$$

В работе [2](стр. 54, лемма 2,5) С.А. Виноградов доказал, что

$$D_{p-1}^p\cap B\subset D_{q-1}^q\cap B,\quad 0<p<q<+\infty.$$

Основные результаты. Замечая, что $H(p,p,1)=A_{p-1}^p$, из вышеупомянутой теоремы К.Л. Аветисяна, как следствие, получается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $0<p<+\infty$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ - произвольная лакунарная последовательность и $f(z)$ - голоморфная в D функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

а) $f' \in H(\infty, p, 1)$; б) $f \in D_{p-1}^{p}$; в) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p < +\infty$.

Более того,

$$\|f\|_{\infty, p, 1} \approx \|f\|_{D_{p-1}^{p}} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Замечание. Из пункта «а» этой теоремы следует, что если f удовлетворяет условиям теоремы и $f \in D_{p-1}^{p}$, то

$$\int_0^1 (1-r)^{p-1} \left(\sup_{0 \le \varphi < 2\pi} \left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)^p dr < +\infty,$$

откуда для $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k} \in D_{p-1}^{p}$ при $|z| \to 1$ будем иметь

$$|f'(z)| \le C(1-|z|)^{-1} \prod_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\log\log\ldots\log}_{k}(1-|z|)^{-1}\right)^{-\frac{1}{p}}$$

для любого натурального числа n.

Таким образом, $f(z) \in B_0 \subset B$. Значит, по лемме С.А. Виноградова для любой функции, заданной сходящимся лакунарным рядом, справедливо следующее утверждение: если $f \in D_{p-1}^{p}$, то $f \in D_{q-1}^{q}$, $0 < p < q < +\infty$.

Далее доказывается следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть $0 < p < q < +\infty$. Тогда:

1) если $f \in D_{p-1}^{p}$ и $M_p^p(r, f')\log(1-r) + \int_0^{2\pi} \left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p \log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi \le 0$,

то $f \in D_{q-1}^{q}$;

2) если $f \in D_{q-1}^{q}$ и $M_p^p(r, f')\log(1-r) + \int_0^{2\pi} \left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p \log\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi > 0$,

то $f \in D_{p-1}^{p}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аветисян К.Л.** Лакунарные ряды в пространствах со смешанной нормой в круге //Изв. НАН Армении. Математика.- 2010.- Том 45, № 5.- С. 9-18.
2. **Виноградов С.А.** Умножение и деление в пространстве аналитических функций с производной, суммируемой по площади, и близких к нему пространствах //Зап. Научн. сем. ПОМИ.- 1995.- Том 222.- С. 45-77.

Ռ.Վ. ԴԱԼԼԱՔՅԱՆ

D_{p-1}^{p} ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԴԱՍԵՐՈՒՄ ՆԵՐԴՐՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ցույց է տրվում, որ $D_{p-1}^{p}\left(0<p<\infty\right)$ դասի ցանկացած ֆունկցիա, որը ներկայացվում է լակունար շարքով, պատկանում է Բլոխի փոքր $B_0 \subset B$ դասին: Բայց $D_{p-1}^{p}\bigcap B$ դասերի ֆունկցիաների համար ներդրվածության խնդիրը լուծված է: Բերվում է հիմնական արդյունքը՝ թեորեմ D_{p-1}^{p} ֆունցիոնալ դասերի ներդրվածության մասին:

Առանցքային բառեր. լակունար շարքեր, խառը նորմով տարածություններ, Հարդիի, Ջրբաշյան-Բերգմանի, Բլոխի դասեր:

R.V. DALLAKYAN

THE PROBLEM OF EMBEDDING IN FUNCTIONAL D_{p-1}^{p} CLASSES

First of all, it is proved that each function from the $D_{p-1}^{p}\left(0<p<\infty\right)$ class which is presented by lacunar series belongs to Bloch's small class $B_0 \subset B$. For the function of the $D_{p-1}^{p}\bigcap B$ class, the problem of embedding is solved.

Further, the main result is given: the theorem of embedding the functional classes D_{p-1}^{p}.

Keywords: lacunar series, space with a mixed norm, Hardy, Jrbashyan, Bergman, Bloch spaces.