

Т.М. АВАНЕСЯН, В.А. МИРЗОЯН

**НОРМАЛЬНО ПЛОСКИЕ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИЕ
ПОДМНОГООБРАЗИЯ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА В ЕВКЛИДОВЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ**

Дается геометрическое описание двух классов нормально плоских полусимметрических подмногообразий коразмерности два в евклидовых пространствах.

Ключевые слова: полусимметрические подмногообразия, конусы, эйнштейновы и полуэйнштейновы подмногообразия.

Введение. Пусть M – m -мерное гладкое риманово многообразие с метрикой g , римановой связностью ∇ и тензором кривизны R . Тензор Риччи R_1 типа $(1,1)$ определяется следующим образом: если (e_1, \dots, e_m) – локальный базис ортонормальных касательных векторных полей на M , то для любого касательного векторного поля X полагаем $R_1(X) = \sum_{i=1}^m R(X, e_i)e_i$. В каждой точке $x \in M$ тензор R_1 действует как симметрический эндоморфизм касательного пространства $T_x(M)$. При $R_1 = \lambda I$ ($\lambda = const$, I – тождественное преобразование) многообразие M называется эйнштейновым, а при $R_1 = 0$ – риччи-плоским. Операторы кривизны $R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M , например,

$$\begin{aligned} (R(X, Y)R_1)Z &= R(X, Y)R_1(Z) - R_1(R(X, Y)Z), \\ (R(X, Y)R)(U, V)W &= R(X, Y)(R(U, V)W) - R(R(X, Y)U, V)W - \\ &\quad - R(U, R(X, Y)V)W - R(U, V)R(X, Y)W, \end{aligned}$$

где X, Y, Z, U, V, W – произвольные касательные векторные поля на M . Тензорное поле T называется параллельным, если $\nabla_X T = 0$ для любого X . Если же $R(X, Y)T = 0$ для любых X, Y , то оно называется полупараллельным. Римановы многообразия с параллельным тензором кривизны называются симметрическими, с полупараллельным тензором кривизны – полусимметрическими, а с полупараллельным тензором Риччи – риччи-полусимметрическими. Верны импликации:

$$\nabla R = 0 \Rightarrow \nabla R_1 = 0 \Rightarrow R(X, Y)R_1 = 0, \quad \nabla R = 0 \Rightarrow R(X, Y)R = 0 \Rightarrow R(X, Y)R_1 = 0.$$

Общая структурная теорема для полусимметрических многообразий была установлена З. Сабо [1], а для риччи-полусимметрических многообразий – автором [2]. Настоящая работа посвящена исследованию нормально плоских полусимметрических подмногообразий коразмерности два в евклидовых пространствах.

Пространства дефектности и относительной дефектности. Пусть M является m -мерным подмногообразием n -мерного евклидова пространства E_n . Если $\tilde{\nabla}$ – риманова связность на E_n , то для любых касательных к M векторных полей X, Y и любого нормального к M векторного поля ξ имеем (см. [3], [4])

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_2(X, Y), \quad \tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi,$$

где $\nabla_X Y$ и $A_\xi(X)$ в точке $x \in M$ принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а $\alpha_2(X, Y)$ и $\nabla_X^\perp \xi$ – нормальному пространству $T_x^\perp(M)$. Эти формулы определяют на M связность Леви-Чивита ∇ , нормальную связность ∇^\perp и вторую фундаментальную форму α_2 . Тензоры кривизны R и R^\perp связностей ∇, ∇^\perp определяются равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi.$$

При $R = 0$ подмногообразие M называется локально евклидовым, а при $R^\perp = 0$ – нормально плоском. Тензор Риччи R_1 подмногообразия M определяется через тензор кривизны R так же, как и для риманова многообразия. Вектор средней кривизны H определяется по формуле $H = \text{tr} \alpha_2$. Если $H = 0$, то подмногообразие называется минимальным.

Пространства дефектности $T_x^{(0)}$ и относительной дефектности T_x' подмногообразия M в точке x определяются, соответственно, формулами

$$T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R(X, Y) = 0 \forall Y \in T_x(M)\}, \\ T_x' = \{X \in T_x(M) : \alpha_2(X, Y) = 0 \forall Y \in T_x(M)\}.$$

Эти понятия были введены и использованы Чженем и Кюйпером [5]. Числа $\mu_x = \dim T_x^{(0)}$ и $\nu_x = \dim T_x'$ называются *индексом дефектности* и *индексом относительной дефектности* подмногообразия M в точке x . Имеет место включение $T_x' \subset T_x^{(0)}$. Интегральное многообразие $M^{(0)}$ распределения $T^{(0)}$ является локально евклидовым в индуцированной метрике и вполне

геодезическим в M . Интегральное многообразие распределения T' представляет собой плоскость. Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$ относительно римановой метрики на M называется пространством кодефектности в точке x , а его размерность – индексом кодефектности M в этой точке. Подмногообразие M с ненулевым индексом дефектности называется полуэйнштейновым, если тензор Риччи R_1 в каждой точке $x \in M$ имеет на $T_x^{(1)}$ только одно ненулевое собственное значение [2].

Изометрическое погружение $M \rightarrow E_n$ называется произведением погружений $M_\varphi \rightarrow E_{n_\varphi}$, если $M = M_1 \times \dots \times M_r$, $E_n = E_{n_1} \times \dots \times E_{n_r}$ и любые два подпространства E_{n_φ} и E_{n_ψ} ($\varphi \neq \psi$) ортогональны в E_n . В этом случае говорят, что M является прямым произведением подмногообразий M_1, \dots, M_r или просто является приводимым как подмногообразие. Если изометрическое погружение $M = M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow E_n$ неприводимо в E_n как подмногообразие, то оно называется сплетающимся произведением подмногообразий M_1, \dots, M_r .

Редукция условий. Пусть $O(E_n)$ – главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n . отождествляя точку x со своим радиус-вектором, будем иметь

$$dx = \omega^A e_A, \quad d e_A = \omega_A^B e_B, \quad \omega_B^A + \omega_A^B = 0, \quad A, B, \dots = 1, \dots, n.$$

Отсюда путем внешнего дифференцирования получим следующие структурные уравнения $d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A$, $d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B$. Если M – m -мерное подмногообразие в E_n , тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что $e_i \in T_x(M)$, ($i, j, \dots = 1, \dots, m$), $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, ($\alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n$). В силу этого по известной схеме (см. [6]) получим $\omega^\alpha = 0$, $\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j$, $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$, где функции h_{ij}^α – компоненты формы α_2 . Компоненты R_{ikl}^j , $R_{\alpha kl}^\beta$, R_{ik} тензоров кривизны R , R^\perp и тензора Риччи R_1 выражаются через h_{ij}^α по формулам

$$R_{ikl}^j = -\sum_{\alpha} h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^\beta = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta, \quad R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum_{\alpha} (h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha),$$

где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = \sum_l h_{ll}^\alpha$ – компоненты вектора средней кривизны H .

Известно (см. [6, 7]), что условия полупараллельности тензоров R , R_1 , соответственно имеют следующий вид: $R^l_{pjk}\Omega_i^p + R^l_{ipk}\Omega_j^p + R^l_{ijp}\Omega_k^p - R^p_{ijk}\Omega_l^p = 0$, $R_{kj}\Omega_i^k + R_{ik}\Omega_j^k = 0$, где Ω_k^j , Ω_α^β – формы кривизны связностей ∇ , ∇^\perp .

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R_{\alpha ij}^\beta = 0$. Тогда все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутируют между собой и в некотором ортономрепере одновременно могут быть приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Тогда $R_{ik} = \rho_i \delta_{ik}$, где $\rho_i = \sum_\alpha [(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha]$. Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются главными векторами кривизны (г.в.к.) нормально плоского подмногообразия в E_n . Очевидно, что $H = n_1 + \dots + n_m$. Если \langle, \rangle – скалярное произведение в E_n , то прямым вычислением получим

$$\rho_j = |n_j|^2 - \langle H, n_j \rangle, \quad k(e_i \wedge e_j) = -R_{ijj} = \sum_\alpha \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha = \langle n_i, n_j \rangle,$$

$$R_{ijkl} = (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \sum_\alpha \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha = (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \langle n_i, n_j \rangle, \quad (1)$$

где $k(e_i \wedge e_j)$ – секционная кривизна.

С учётом результатов, полученных в [6] и [7], заключаем, что для нормально плоского подмногообразия в E_n необходимые и достаточные условия полупараллельности тензора кривизны R и тензора Риччи R_1 имеют соответственно следующий вид:

$$\langle n_i - n_k, n_j \rangle \langle n_i, n_k \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\langle n_i - n_k, n_i + n_k - H \rangle \langle n_i, n_k \rangle = 0 \quad (3)$$

при любых различных значениях индексов. Условие (3) равносильно $(|n_j|^2 - |n_k|^2 + \langle H, n_k \rangle - \langle H, n_j \rangle) \langle n_j, n_k \rangle = 0$ или $(\rho_j - \rho_k) \langle n_j, n_k \rangle = 0$. Покажем, что из (2) следует (3). Действительно, если в (2) $\langle n_i, n_k \rangle = 0$, то (3) выполняется. Если в (2) $\langle n_i, n_k \rangle \neq 0$, то $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$. Суммируя последнее равенство по j ($j \neq i, j \neq k$), получим $\langle n_i - n_k, n_i + n_k - H \rangle = 0$. Следовательно, условие (3) также выполняется.

Из (2) следует, что множество всех г.в.к. нормально плоского полусимметрического подмногообразия естественным образом разбивается на

группы $W^{(0)}, W^{(1)}, \dots, W^{(t)}$ так, что векторы, принадлежащие разным группам, ортогональны, а векторы, принадлежащие одной и той же группе, удовлетворяют условию $\langle n_i - n_k, n_j \rangle = 0$. Из приведённых выше равенств следует, что при соответствии, устанавливаемой формулой $\rho_j = |n_j|^2 - \langle H, n_j \rangle$, группы $W^{(0)}, W^{(1)}, \dots, W^{(t)}$ соответствуют различным собственным значениям тензора Риччи. Будем считать, что группа $W^{(0)}$ соответствует нулевому собственному значению, а $W^{(1)}, \dots, W^{(t)}$ соответствуют ненулевым собственным значениям ρ_1, \dots, ρ_t тензора Риччи R_1 .

Пусть подмногообразия M имеют коразмерность два, т.е. $n = m + 2$. Тогда возможны, например, следующие случаи:

(а) тензор Риччи имеет только два ненулевых собственных значения ρ_1, ρ_2 , которым соответствуют группы г.в.к. $W^{(1)}, W^{(2)}$;

(б) тензор Риччи имеет нулевое собственное значение, причём $W^{(0)}$ содержит только нулевой г.в.к., и два ненулевых собственных значения ρ_1, ρ_2 , которым соответствуют группы г.в.к. $W^{(1)}, W^{(2)}$.

Наша цель - сформулировать теорему, которая даёт геометрическое описание нормально плоского полусимметрического подмногообразия в указанных двух случаях.

Теорема. Пусть M является m -мерным нормально плоским полусимметрическим подмногообразием евклидова пространства E_{m+2} . Если выполняется условие (а), то локально M представляет собой прямое произведение двух сфер, т.е. $M = S^r \times S^{m-r}$, $r \geq 2$, $m - r \geq 2$. В случае (б) M локально является одним из следующих произведений:

$$E_p \times S^r \times S^{m-p-r}, \quad k \geq 1, \quad r \geq 2, \quad m - p - r \geq 2,$$

$$E_{p-1} \times C^{r+1} \times S^{m-p-r}, \quad p \geq 2, \quad r \geq 2, \quad m - p - r \geq 2,$$

$$E_{p-2} \times C^{r+1} \times C^{m-p-r+1}, \quad p \geq 3, \quad r \geq 2, \quad m - p - r \geq 2,$$

где C^{r+1} - конус вращения над сферой S^r , $C^{m-p-r+1}$ - конус вращения над сферой S^{m-p-r} , а E_{p-1} и E_{p-2} - плоскости соответствующих размерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Szabo Z.I.** Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$. I. The local version // J. Differential Geom. – 1982. - 17, № 4. – P. 531-582.
2. **Мирзоян В.А.** Структурные теоремы для римановых Ric -полусимметрических пространств // Изв. Вузов. Математика. -1992. -№6. –С. 80-89.
3. **Chen B.-Y.** Geometry of submanifolds. - New York: Marcel Dekker, 1973.-298p.
4. **Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S.** Lectures on differential geometry. -Singapore: World Scientific. 2000. -356p.
5. **Chern S.S., Kuiper N.** Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Eudlidean Space // Ann. of Math. – 1952. – **56**, № 3. -P. 422-430.
6. **Lumiste Ü.** Semiparallel submanifolds in space forms. - New York: Springer, 2009.-306 p.
7. **Мирзоян В.А.** Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric -полупараллельных подмногообразий // Изв. РАН. Сер.Матем. - 2003. -67, №5. –С.107-124.

S.Մ. ԱՎԱՆԵՍՅԱՆ, Վ.Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ

**ԵՐԿՈՒ ԿՈՉԱՓԱՆԻ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՐԹ ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ
ԵՆԹԱԲԱԶՄԱԶԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ
ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ**

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է երկու կոչափանի նորմալ հարթ կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների երկու դասերի երկրաչափական նկարագրությունը:

Առանցքային բառեր. կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, կոներ, էյնշտեյնյան և կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ.

T.M. AVANESYAN, V.A. MIRZOYAN

**NORMALLY FLAT SEMI-SYMMETRIC SUBMANIFOLDS
OF CODIMENSION TWO IN EUCLIDEAN SPACES**

A geometric description of two classes of normally flat semi-symmetric submanifolds of codimension two in Euclidean spaces is given.

Keywords: semisymmetric submanifolds, cones, Einstein and semi-Einstein submanifolds.