

А.Г. МАЛХАСЯН

**СЛУЧАЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОЙ СИЛЫ
(Гюмри)**

Рассматриваются случайные изгибные колебания вязкоупругого стержня под действием периодической осевой силы. Для учета случайного характера вязкоупругих свойств материала стержня допускается, что ядро релаксации является гауссовской стационарной случайной функцией времени. Строится корреляционная функция и дисперсия решения. Результаты представлены на рисунках.

Ключевые слова: вязкоупругость, наследственность, ядро релаксации, корреляционная функция, дисперсия решения.

Введение. Как известно, энергетические объекты наряду с разнообразными статическими и температурными воздействиями подвергаются также динамическим воздействиям, которые разделяются на локальные, вызывающие местные эффекты в пределах ограниченных зон сооружений, и глобальные, вызывающие колебания всего сооружения.

Локальные воздействия связаны с оценкой местной прочности, устойчивости при динамических нагрузках. В связи с этим в данной работе рассматриваются изгибные колебания вязкоупругого стержня с шарнирным опиранием концов при периодическом осевом нагружении типа "прямоугольный синус" (рис.1) и с учетом таких геометрических несовершенств, как начальная кривизна, амплитуда которой считается случайной величиной.

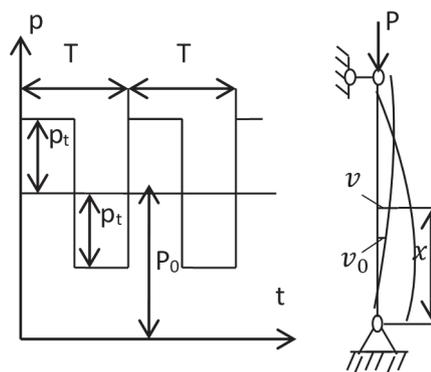


Рис.1. Осевая нагрузка типа "прямоугольный синус"

Методы исследования. Для учета случайного характера вязкоупругих свойств материала стержня допускается, что ядро релаксации является гауссовской стационарной случайной функцией времени с известным математическим ожиданием и корреляционной функцией [1]. Будем считать, что свойства материала стержня инвариантны во времени и известны дисперсия и математическое ожидание амплитуды начального прогиба $v_0(x)$.

В рамках этих предположений получим интегродифференциальное уравнение колебаний стержня:

$$EI(1 - \Gamma) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2(v+v_0)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial v}{\partial t} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $EI(1 - \Gamma) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - \int_0^t \Gamma(t - \tau) \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} d\tau$, $P = P_0 \pm P_1$,

$\Gamma(t - \tau)$ - ядро релаксации; μ - коэффициент демпфирования; m - погонная масса стержня.

Полагая, что начальное отклонение от прямой синусоидально и стержень колеблется по первой форме, запишем

$$v_0(x) = f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right); v(x, t) = f(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (2)$$

где l - длина стержня.

Подставляя (2) в (1), получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial f}{\partial t} + \omega^2 \left(1 - \frac{P}{P_3}\right) f - \omega^2 \int_0^t f(\tau) \Gamma(t - \tau) d\tau = \omega^2 f \frac{P}{P_3}, \quad (3)$$

где $P < P_3$ - эйлерова сила, $\omega = \pi^2 EI/ml^4$, $2n = \mu/m$. При этом начальные условия $f(0) = \frac{df(0)}{dt} = 0$.

Введем безразмерный параметр времени $t^* = \omega t$, $\tau^* = \omega \tau$. В дальнейшем будем писать просто t , τ . Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{2n}{\omega} \frac{\partial f}{\partial t} + \left(1 - \frac{P}{P_3}\right) f - \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \Gamma(t - \tau) d\tau = f_0 \frac{P}{P_3}. \quad (4)$$

Представим ядро релаксации и амплитуду начального прогиба соответственно в виде

$$\Gamma(t - \tau) = \Gamma_0 + \varepsilon \Gamma_1; f_0 = \bar{f}_0 + \varepsilon \tilde{f}_0. \quad (5)$$

Здесь Γ_0 и Γ_1 - соответственно среднее значение и центрированная случайная составляющая функции $\Gamma(t - \tau)$; \bar{f}_0, \tilde{f}_0 - математическое ожидание и центрированная случайная составляющая случайной величины f_0 . Тогда

решение уравнения (4) можно представить в виде ряда по степеням малого параметра ε [1]:

$$f = \bar{f} + \varepsilon f + \varepsilon^2 f + \dots \quad (6)$$

Имея в виду, что параметр ε достаточно малый, будем ограничиваться нулевым и первым приближениями.

Подставляя (5) и (6) в (4) и приравнявая коэффициенты, содержащие нулевую и первую степень параметра ε , получим два уравнения:

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial t^2} + \frac{2n}{\omega} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + q\bar{f} - \frac{1}{\omega} \int_0^t \bar{f}(\tau) \Gamma_0(t - \tau) d\tau = \bar{f}_0 \frac{P}{P_3}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{2n}{\omega} \frac{\partial f_1}{\partial t} + qf_1 - \frac{1}{\omega} \int_0^t f_1(\tau) \Gamma_0(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega} \int_0^t \bar{f}(\tau) \Gamma_1(t - \tau) d\tau + \tilde{f}_0 \frac{P}{P_3}, \quad (8)$$

где $q = 1 - P/P_3$.

Применяя преобразования Лапласа к уравнениям (7) и (8), получим

$$F(s^2 + \frac{2ns}{\omega} + q - \Gamma_0^*/\omega) = \gamma \bar{f}_0/s; \quad (9)$$

$$F_1(s^2 + \frac{2ns}{\omega} + q - \Gamma_0^*/\omega) = F\Gamma_1^*/\omega + \gamma \tilde{f}_0/s, \quad (10)$$

где $F, F_1, \Gamma_0^*, \Gamma_1^*$ - трансформанты; s - параметр Лапласа.

Так как математическое ожидание и ядро релаксации $\Gamma_0 = B = \text{const}$, то $\Gamma_0^* = B/s$, и из уравнений (9) и (10) получим

$$F = \gamma \bar{f}_0/\varphi(s); \quad (11)$$

$$F_1 = \frac{\gamma \tilde{f}_0}{\omega} \Phi^*(s)\Gamma_1^*(s) + \gamma \tilde{f}_0/\varphi(s), \quad (12)$$

где $\varphi(s) = s^3 + \frac{2ns^2}{\omega} + qs - \frac{B}{\omega}$; $\Phi^*(s) = s/[\varphi(s)]^2$.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнениям (11) и (12), получим

$$\bar{f}(t) = \gamma \bar{f}_0 (A_1 e^{s_1 t} + B_1 e^{s_2 t} + C_1 e^{s_3 t}); \quad (13)$$

$$f_1(t) = \frac{\gamma \tilde{f}_0}{\omega} \int_0^t \Gamma_1(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau + (\tilde{f}_0/\bar{f}_0) \bar{f}(t). \quad (14)$$

Здесь s_1, s_2, s_3 - корни уравнения $\varphi(s) = 0$; $A_1 = \frac{1}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)}$;

$$B_1 = \frac{1}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)}; \quad C_1 = \frac{1}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}.$$

Допустим, что s_1 - действительный, а s_2 и s_3 - два сопряженных комплексных корня уравнения $\varphi(s) = 0$, что показало его численное исследование при довольно широком диапазоне изменения параметров n , ω , q и V . С учетом этих соображений уравнения (13) и (14) принимают вид

$$\bar{f}(t) = \gamma \bar{f}_0 A_1 [e^{s_1 t} - e^{-\alpha t} (\cos \beta t + \frac{g}{\beta} \sin \beta t)]; \quad (15)$$

$$f_1(t) = \frac{\gamma \bar{f}_0}{\omega} \int_0^t \Gamma_1(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau + \bar{f}(t) \tilde{f}_0 / \bar{f}_0. \quad (16)$$

Здесь α, β - соответственно действительная и мнимая части комплексно-сопряженных корней; s_2 и s_3 ; $g = s_1 + \alpha$:

$$\Phi(t) = \gamma \bar{f}_0 [s_1 A_1 t e^{s_1 t} + 2(m_1 + m_2) e^{s_1 t} + 2(m_2 - m_1 + m_4 - m_3 t) \times \\ \times e^{-\alpha t} \cos \beta t + 2(k_1 + k_2 - k_4 - k_3 t) e^{-\alpha t} \sin \beta t]; \quad (17)$$

$$A_1 = \frac{1}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} = 1/(g^2 + \beta^2), m_1 = (d_1 g + h_1 \beta), m_2 = A_1^2 (h_2 \beta - d_2 g),$$

$$m_3 = d_1 d_2 + h_1 h_2, m_4 = (d_1 h_2 + h_1 d_2)/2\beta; k_1 = A_1 (d_1 \beta + h_1 g),$$

$$k_2 = A_1^2 (h_2 g - d_2 \beta), k_3 = d_1 h_2 + h_1 d_2, k_4 = (h_1 h_2 + d_1 d_2)/2\beta; d_1 = \\ = \frac{-A_1}{2}, d_2 = \frac{-s_1 A_1}{2}, h_1 = \frac{-g A_1}{2\beta}; h_2 = \frac{-A_1}{2\beta} (\beta^2 + g\alpha).$$

Отметим, что при $0 \leq t \leq \frac{\omega \vartheta T}{2}$ ($\vartheta = 1, 3, 5, \dots$), где T - период внешней силы, $q = 1 - (P_0 - P_t)/P_3$, и решением уравнений (7) и (8) будут соответственно (15) и (16). Если $\omega T/2 \leq t \leq \frac{\omega \vartheta T}{2}$ ($\vartheta = 2, 4, 6, \dots$), $q = 1 - (P_0 + P_t)/P_3$, то решение уравнений (7) и (8) можно будет опять представить соответственно в виде (15) и (16) при других значениях параметров $\alpha, \beta, q, s, \gamma$.

Частоту силы $P_t \theta = 2\pi/T$ будем принимать равной частоте собственных колебаний ω [2,3].

Корреляционная функция (16) будет

$$K(t_1, t_2) = \frac{\gamma^2 \bar{f}_0^2}{\omega^2} \int_0^{t_1} K_\Gamma(\tau_1 - \tau_2) \Phi(t_1 - \tau_1) \Phi(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + D_f \left[\frac{\bar{f}(t)}{\bar{f}_0} \right]^2, \quad (18)$$

где $K_\Gamma(\tau_1 - \tau_2)$ - корреляционная функция ядра релаксации; D_f - дисперсия случайной величины \tilde{f}_0 .

Пусть

$$K_\Gamma(\tau_1 - \tau_2) = \sigma_\Gamma^2 e^{-r|\tau_1 - \tau_2|}, \quad (19)$$

где $r = \rho/\omega$; σ_Γ^2 - постоянная дисперсия функции K_Γ ; ρ - коэффициент корреляции.

Подставив (17) и (19) в (18) и выполнив интегрирование, получим корреляционную функцию $K(t_1, t_2)$. Затем, полагая $t_1 - t_2 = t$, найдем дисперсию амплитуды колебания стержня:

$$K(t_1, t_2)|_{t_1=t_2=t} = D(t). \quad (20)$$

Выражение дисперсии не будем выписывать, так как оно довольно громоздкое.

Численная реализация формул (15) и (20) произведена на компьютере при следующих данных:

$$m=0.8 \text{ Нс}^2/\text{см}^2; EI=3.510^8 \text{ Нсм}^2; \bar{f}_0 = 0.05 \text{ см}, l = 100 \text{ см};$$

$$\mu = 0.25 \text{ Нс}/\text{см}^2, B = 0.1 \text{ сут}^{-1}, \sigma_f^2 = 0.01 \text{ сут}^{-2}, D_f = 0.0004 \text{ см}^2, \rho = 0.1 \text{ сут}^{-1}.$$

Результаты исследования. На рис.2 сплошной линией показана зависимость максимальных значений математического ожидания параметра амплитуды от безразмерного времени. Как видно из рисунка, при больших значениях параметра времени все больше сказывается влияние вязкоупругих свойств материала стержня на величину амплитуды, которая неограниченно возрастает.

На рис.3 сплошной линией показана зависимость параметра амплитуды от параметра нагрузки. Из этого рисунка видно, что амплитуда колебания отлична от нуля для всех значений динамических нагрузок и быстро возрастает с ростом нагрузки.

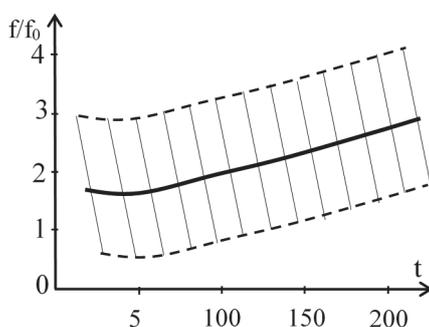


Рис. 2. Зависимость максимальных значений математического ожидания параметра амплитуды от безразмерного времени

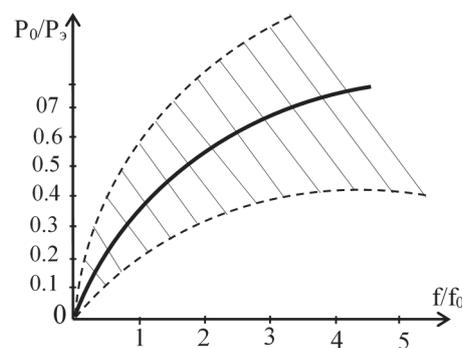


Рис. 3. Зависимость параметра амплитуды от параметра нагрузки

На рис. 2 и 3 штрихованные линии ограничивают "доверительную область" значений f/f_0 , построенную по правилу "трех сигм". С вероятностью, близкой единице, значения случайной величины f/f_0 будут находиться в штрихованной зоне. При этом разброс составляет около 20% значения математического ожидания.

Выводы

1. Как видно из рис. 2, при больших значениях параметра времени все больше сказывается влияние вязкоупругих свойств материала стержня на величину амплитуды, которая неограниченно возрастает.

2. Построена "доверительная область" значений f/f_0 по правилу "трех сигм". С вероятностью, близкой единице, значения случайной величины f/f_0 будут находиться в штрихованной зоне. При этом разброс составляет около 20% значения математического ожидания.

3. Приведенный метод дает возможность оценить надежность устойчивого положения стержневых конструкций с учетом более реальных свойств материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Малхасян А.Г., Погосян Г.С.** Колебания балки из материала, обладающего линейной ползучестью, с учетом случайных факторов//Изв. вузов. Строительство и архитектура.- 1987.- № 9.- С.43-47.
2. **Шмидт Г.** Параметрические колебания.-М.: Мир,1978.- 336с.
3. **Стивенс К.** Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы//Прикладная механика: Тр. Американского общества инженеров-механиков.-М.: Мир, 1969.- № 4.- С.168-173.

Ա.Տ. ՄԱԼԽԱՍՅԱՆ

ԱՌԱՋԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՁՈՂԻ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՈՒԺԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Դիտարկվում են առաձգամածուցիկ ձողի ծոման պատահական տատանումները պարբերական առանցքային ուժի ազդեցության տակ: Ձողի նյութի առաձգամածուցիկ հատկությունների պատահական բնույթը հաշվի առնելու համար ընդունվում է, որ ռելաքսացիայի միջուկը հանդիսանում է ժամանակից կախված գաուսյան ստացիոնար պատահական ֆունկցիա: Կառուցվում են լուծման կորելյացիոն ֆունկցիան և դիսպերսիան: Արդյունքները ներկայացվում են նկարներով:

Առանցքային բառեր. մածուցիկաառաձգական, ժառանգականություն, ռելաքսացիայի միջուկ, կորելյացիոն ֆունկցիա, լուծման դիսպերսիա:

A.H. MALKHASYAN

**RANDOM PARAMETRIC VIBRATIONS OF A VISCOELASTIC ROD
UNDER THE INFLUENCE OF AN AXIAL FORCE**

Random bending vibrations of a viscoelastic rod under the action of a periodic axial force are considered. To take into account the random nature of the viscoelastic properties of the rod material, it is assumed that the relaxation kernel is a Gaussian stationary random function of time. The correlation function and variance of the solution are constructed. The results are presented in the Figures.

Keywords: viscoelasticity, heredity, relaxation kernel, correlation function, solution dispersion.

ՀՏԴ 691:622.2

Լ.Ա. ԴԵՄԻՐՉՅԱՆ, Ա.Վ. ԳԱԼՍՅԱՆ

**ԱՆՁՐԵՎԱՋՐԵՐԻ ԿՈՒՏԱԿՈՒՄԸ ՇԵՆՔԵՐԻ ԶՐՀՈՐԴԱՆ
ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐՈՒՄ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ՕԳՏԱԳՈՐԾՄԱՆ ՀԵՌԱՆԿԱՐՆԵՐԸ
(Վանաձոր)**

Ներկայիս գլոբալ կլիմայական անցանկալի փոփոխությունների պատճառով հաճախակի են դարձել հորդառատ անձրևները, որոնք մի քանի ժամվա ընթացքում հեղեղում են խոշոր քաղաքների փողոցներն ու ստորգետնյա հաղորդակցությունները՝ երբեմն ստեղծելով աղետալի իրավիճակներ: Մյուս կողմից՝ հատկապես խոշոր քաղաքներում զգալիորեն աճել է տարեկան միջին ջերմաստիճանը, իսկ տեղումների քանակը նվազել է, ինչը նույնպես կապված է կլիմայի փոփոխության հետ: Եղանակային այս անոմալիաները զգալիորեն խոչընդոտում են քաղաքների բնականոն գործունեությանը, ինչպես նաև էապես դեգրադացիայի են ենթարկում քաղաքների կանաչ տարածքները:

Ներկայացված են շենքերի ջրհորդան խողովակներում անձրևաջրերի կուտակման եղանակները, որոնք կարող են օգտագործվել ինչպես ոռոգման, այնպես էլ տեխնիկական այլ նպատակներով: Սույն լուծումը զգալի զսպիչ դեր կունենա քաղաքային տարածքների հեղեղումները կանխարգելելու հարցում, որն իր հերթին կբարձրացնի սանիտարահիգիենիկ մաքրության մակարդակը:

Առանցքային բառեր. ջրհորդան, հեղեղատար, ոռոգում, կոյուղի, ջրատար, կլիմա, սարքավորում, փական:

Աշխարհի շատ բնակավայրերի ջրահեռացման համակարգերի խողովակաշարերը կառուցվել են շուրջ կես դար առաջ և հիմնականում գործում են անբավարար: Տարիների ընթացքում պահպանման, մաքրման, վերանորոգման ու վերակառուցման աշխատանքների ոչ բավարար լինելու հետևանքով ջրահեռացման