

О.Н. ГАСПАРЯН, Л.М. БУНИАТЯН, А.А. КАРАПЕТЯН

АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Предлагается простой метод исследования, основанный на методах гармонической линеаризации и характеристических передаточных функций, симметричных одночастотных автоколебаний в нелинейных двумерных системах автоматического управления с одинаковыми передаточными функциями отдельных каналов и жесткими взаимными связями. В отличие от общего подхода, где требуются определение всех векторов амплитуд автоколебаний, удовлетворяющих условию коллинеарности, и последующая проверка условия гармонического баланса для одномерных характеристических систем, описанный в статье подход основан на определении тех значений амплитуд и частот колебаний, при которых одна из двух характеристических систем находится на границе устойчивости. Процедура исследования автоколебаний при этом оказывается максимально приближенной к классической процедуре исследования нелинейных систем с одним входом и выходом. Приведен численный пример исследования автоколебаний и даны результаты динамического моделирования в среде пакета Simulink, подтверждающие расчетные данные.

Ключевые слова: двумерная система управления, нелинейная система, метод характеристических передаточных функций, исследование автоколебаний.

Введение. Задача исследования автоколебаний в многомерных, т.е. имеющих несколько входов и несколько выходов, нелинейных системах автоматического регулирования является сложной, не имеющей в настоящее время общего решения. В инженерной практике при проектировании нелинейных систем наиболее часто применяется приближенный метод гармонической линеаризации, который основан на учете только первой гармоники периодических колебаний на выходах нелинейных элементов. Необходимые условия существования автоколебаний при этом записываются в виде условия нахождения на границе устойчивости одной из характеристических систем гармонически линеаризованной многомерной системы и так называемого условия коллинеарности вектора амплитуд автоколебаний и соответствующей оси канонического базиса системы. Трудоемкость численных расчетов при этом резко возрастает с ростом размерности системы, т.е. с увеличением числа отдельных каналов.

Особое внимание к вопросам исследования автоколебаний в нелинейных двумерных (т.е. с двумя входами и двумя выходами) системах автоматического управления (ДСАУ) с идентичными каналами и жесткими перекрестными связями вызвано тем, что они образуют важный и обширный класс многомерных

систем управления, широко распространенный в различных областях современной техники [1-3].

Развернутая структурная схема нелинейной ДСАУ показана на рис. 1, где $R = \{r_{ij}\}$ - числовая матрица жестких взаимных связей, $w(s)$ - передаточная функция идентичных каналов, $F_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) - нелинейности в отдельных каналах.

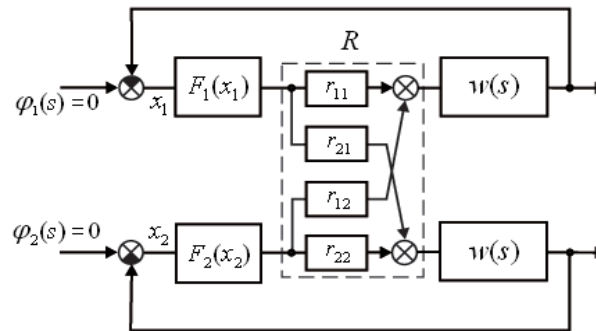


Рис. 1. Двумерная система управления с диагональной матрицей нелинейностей

Если обозначить коэффициенты гармонической линеаризации нелинейностей через $q_i(A_i)$ [4, 5], то уравнение динамики гармонически линеаризованной ДСАУ на рис. 1 примет вид

$$[I + w(j\Omega)R \text{diag}\{q_i(A_i)\}]x = 0, \quad (1)$$

или в развернутой форме:

$$x_1 + r_{11} q_1(A_1) w(j\Omega) x_1 + r_{12} q_2(A_2) w(j\Omega) x_2 = 0, \quad (2)$$

$$x_2 + r_{22} q_2(A_2) w(j\Omega) x_2 + r_{21} q_1(A_1) w(j\Omega) x_1 = 0. \quad (3)$$

На основе метода характеристических передаточных функций (ХПФ) необходимое условие возбуждения в режиме установившихся автоколебаний одной из двух характеристических систем будет иметь вид

$$w(j\Omega) = -\frac{1}{\lambda_r(A_{1,2})}, \quad (4)$$

где $\lambda_r(A_{1,2})$ ($r = 1, 2$) – собственные значения сопутствующей матрицы взаимных связей;

$$N(A_{1,2}) = R \text{diag} \{q_i(A_i)\}, \quad (5)$$

т.е. корни квадратного уравнения

$$\det [\lambda I - N(A_{1,2})] = \lambda^2 - \left(\sum_{i=1}^2 r_{ii} q_i(A_i) \right) \lambda + \left(\prod_{i=1}^2 q_i(A_i) \right) \det R = 0. \quad (6)$$

В уравнениях (4)-(6) явным образом подчеркивается зависимость $N(A_{1,2})$ и $\lambda_r(A_{1,2})$ от двух неизвестных амплитуд A_1 и A_2 .

Наряду с условием (4) для существования автоколебаний в ДСАУ должно выполняться и необходимое условие коллинеарности [5, 6], которое имеет вид

$$A = |A| m_r(A_{1,2}). \quad (7)$$

Сравнительно простой вид условия (4), где левая часть содержит одно неизвестное – частоту Ω , а правая зависит от двух амплитуд A_1 и A_2 , дает возможность определить при помощи несложной графической процедуры множество *троек* значений A_1 , A_2 и Ω , при которых одна из характеристических систем находится на границе устойчивости, т.е. удовлетворяет необходимому условию (4), а другая устойчива. Эта процедура заключается в следующем. Зафиксируем значение одной из амплитуд, например A_1 , т.е. примем $A_1 = \text{const}$. Тогда правая часть в (4) будет зависеть только от одной амплитуды A_2 , и для конкретного r условие (4) окажется по своему виду полностью схожим с известным условием гармонического баланса одномерных нелинейных систем [4], с той лишь разницей, что функция $-1/\lambda_r(A_{1,2})$ в (4) зависит не только от нелинейностей системы, но и от матрицы взаимных связей R . Изменяя при $A_1 = \text{const}$ амплитуду A_2 от нуля до бесконечности, можно построить на комплексной плоскости годографа $w(j\Omega)$ две параметрические кривые: $-1/\lambda_1(A_{1,2})$ и $-1/\lambda_2(A_{1,2})$. В случае однозначных нелинейностей собственные значения матрицы $N(A_{1,2})$ (5) являются или действительными числами, или комплексно-сопряженными, и поэтому кривые $-1/\lambda_{1,2}(A_{1,2})$ или лежат на действительной оси, или симметричны относительно неё (рис. 2а). При неоднозначных нелинейностях симметрия указанных кривых относительно действительной оси нарушается (рис. 2б). Точки пересечения

кривых $-1/\lambda_{1,2}(A_{1,2})$ с $w(j\Omega)$ дают тройки значений A_1, A_2, Ω , при которых характеристические системы находятся на границе устойчивости, а характеристическое уравнение гармонически линеаризованной ДСАУ имеет чисто мнимые корни. Если обе кривые $-1/\lambda_{1,2}(A_{1,2})$ ($A_1 = const$) пересекаются с $w(j\Omega)$ при разных $A_2^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$, где верхний индекс указывает номер кривой, то из этих двух значений нужно оставить только одно, исходя из того факта, что в режиме автоколебаний возбуждается только одна характеристическая система, а вторая должна быть устойчивой.

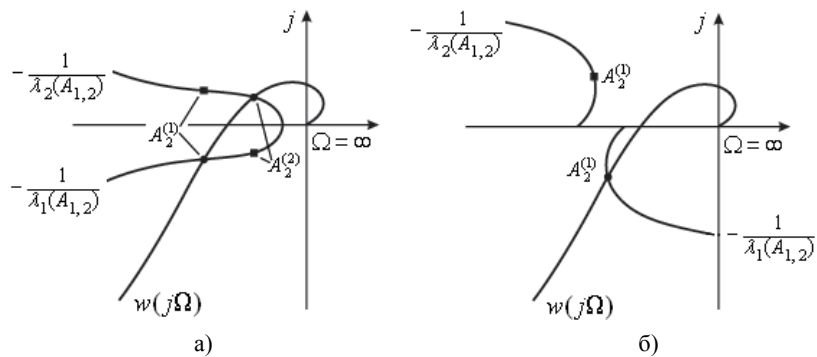


Рис. 2. Исследование автоколебаний в ДСАУ:

а- однозначные нелинейности; б- неоднозначные нелинейности

С этой целью на кривой $-1/\lambda_1(A_{1,2})$ отмечается точка $A_2^{(2)}$, а на кривой $-1/\lambda_2(A_{1,2})$ - точка $A_2^{(1)}$. Тогда возможным автоколебаниям в ДСАУ будет соответствовать та из амплитуд $A_2^{(1)}$ или $A_2^{(2)}$, критическая точка для которой не охватывается годографом $w(j\Omega)$. Варьируя величиной $A_1 = const$, можно построить на комплексной плоскости серию кривых $-1/\lambda_{1,2}(A_{1,2})$ (рис. 3). Точка пересечения этих кривых с годографом $w(j\Omega)$ дает множество троек значений амплитуд A_1, A_2 и частоты Ω , удовлетворяющих необходимому условию (4) существования автоколебаний в ДСАУ.

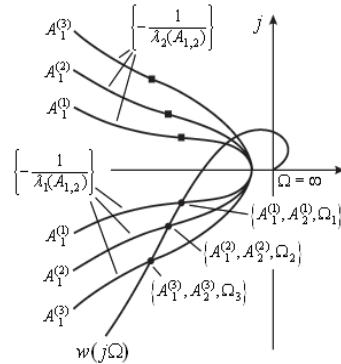


Рис. 3. Определение троек значений A_1 , A_2 и Ω , удовлетворяющих необходимому условию существования автоколебаний (4)

Геометрически множество $\{A_1, A_2, \Omega\}$ характеризует некоторую параметрическую с параметром Ω кривую $A_1 = f_1(A_2, \Omega)$ в первом квадранте плоскости с координатами A_1 и A_2 (рис. 4).

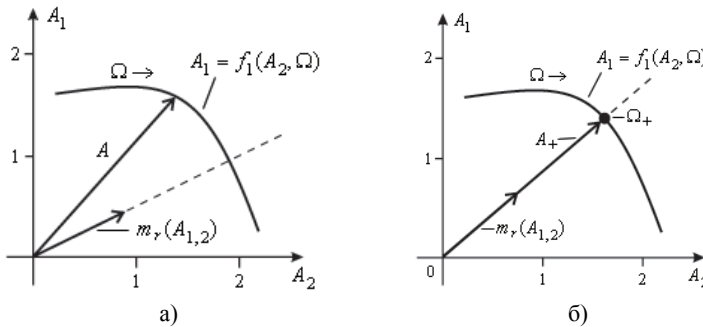


Рис. 4. Проверка выполнения условия коллинеарности (7):
а- условие не выполняется; б- условие выполняется

Как вытекает из способа получения этой кривой, в каждой её точке одна из характеристических систем находится на границе устойчивости, а вторая устойчива. Чтобы выделить из множества троек $\{A_1, A_2, \Omega\}$ ту тройку значений A_1 , A_2 и Ω , которая соответствует возможным автоколебаниям в ДСАУ, следует обратиться к необходимому условию коллинеарности (7). Согласно этому условию, вектор амплитуд A должен быть направлен вдоль единичного вектора $m_r(A_{1,2})$, составленного из модулей компонент оси канонического базиса $c_r(A_{1,2})$ возбуждаемой характеристической системы. Для каждой

точки кривой $A_1 = f_1(A_2, \Omega)$ на рис. 4а нетрудно вычислить собственный вектор $c_r(A_{1,2})$, а также вектор $t_r(A_{1,2})$ и отложить последний на плоскости OA_1A_2 . Тогда, основываясь на условии коллинеарности (7), можно сформулировать приведенный ниже критерий существования симметричных автоколебаний в ДСАУ:

Автоколебаниям в нелинейных ДСАУ удовлетворяет только та точка на параметрической кривой $A_1 = f_1(A_2, \Omega)$, которая лежит на луче, проведенном из начала координат в направлении вектора $t_r(A_{1,2})$, вычисленного для значений A_1, A_2 в данной точке (рис. 4б).

Числовой пример. Исследуем автоколебания в ДСАУ на рис. 1, считая, что передаточная функция $w(s)$ имеет вид

$$w(s) = \frac{750000000}{s(s+25)(s+400)(s+500)}, \quad (8)$$

матрица R равна

$$R = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -0.342 & 0.9397 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

а нелинейности являются насыщением с зонами линейности $\Delta = 4$.

Коэффициент гармонической линеаризации нелинейности типа насыщения определяется следующим выражением:

$$q(A) = \frac{2c}{\pi\Delta} \left[\arcsin \frac{\Delta}{A} + \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right], \quad A \geq \Delta, \quad (10)$$

где через c обозначен уровень насыщения.

На рис. 5 показан годограф $w(j\Omega)$ и нанесено семейство кривых $-1/\lambda_{1,2}(A_{1,2})$ для разных $A_1 = const$ и при изменении A_2 от нуля до бесконечности. Собственные значения $\lambda_{1,2}(A_{1,2})$ при этом являются или комплексно-сопряженными, или действительными числами, причем полуокружности в верхней полуплоскости на рис. 5 соответствуют первой характеристической системе, а в нижней полуплоскости – второй.

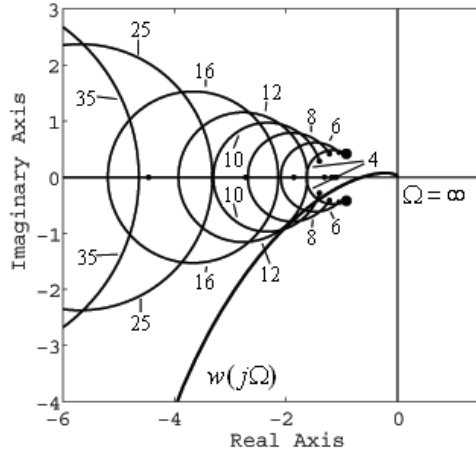


Рис. 5. Семейство кривых $-1/\lambda_{1,2}(A_{1,2})$ на плоскости годографа $w(j\Omega)$

Как видно из рис. 5, с годографом $w(j\Omega)$ пересекаются только кривые $-1/\lambda_2(A_{1,2})$, расположенные в нижней полуплоскости и относящиеся ко второй характеристической системе. По точкам пересечения кривых $-1/\lambda_2(A_{1,2})$ с $w(j\Omega)$ на рис. 6 построена параметрическая кривая $A_1 = f_1(A_2, \Omega)$, на которой указаны частоты Ω , найденные по годографу $w(j\Omega)$ в соответствующих точках пересечения. Пунктирные линии на рис. 6 показывают границы линейных зон нелинейностей типа насыщения в отдельных каналах системы. По тройкам значений A_1 , A_2 и Ω , взятым на кривой $A_1 = f_1(A_2, \Omega)$, на том же рисунке построена кривая $f_2(A_1, A_2, \Omega)$, где также указаны соответствующие частоты Ω . Из рис. 6 видно, что имеется два пересечения рассматриваемых кривых. Однако оцифровка по частоте Ω показывает, что действительное пересечение кривых, где значения частот на обеих кривых совпадают, соответствует значению $\Omega_+ = 39.97$, где амплитуды колебаний равны: $A_1 = 11.54$, $A_2 = 8.1$.

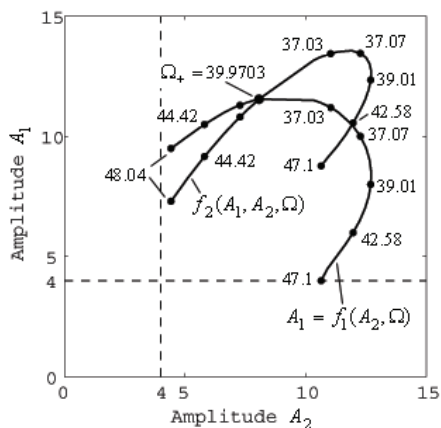


Рис. 6. Определение параметров автоколебаний

Графические построения на рис. 5 и 6 были осуществлены при помощи специальной программы, разработанной на языке MATLAB. Ниже приведен фрагмент программы, относящийся к вычислению коэффициентов гармонической линеаризации $q(A)$ (10) и включающий также более общий случай нелинейности типа насыщения с зоной нечувствительности.

Программа вычисления коэффициентов гармонической линеаризации нелинейности типа насыщения на языке MATLAB

```
function Q = FindDescrFunct(TypeNum,AI);
% Evaluation of Separate Describing Function K2---> F(x) ---> K1 -output
K = NonLinElem.K; A = NonLinElem.A; B = NonLinElem.B; C = NonLinElem.C;
switch TypeNum
case 2 % Saturation
if AI > B
Q = 2*K*(asin(B/AI) + (B/AI)*sqrt(1 - (B/AI)^2) )/pi;
else
Q = K;
end
case 4 % Saturation & Dead Band
if AI > C
Q = 2*K*(asin(C/AI) - asin(B/AI) + (C/AI)*sqrt(1 - (C/AI)^2) - (B/AI)*sqrt(1 -
-(B/AI)^2))/pi;
elseif AI < C && AI > B
Q = K - 2*K*(asin(B/AI) + (B/AI)*sqrt(1 - (B/AI)^2))/pi; ;
else
Q = 0;
end
end
end
```

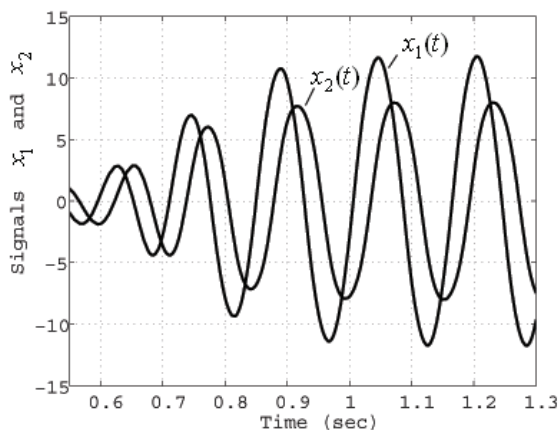


Рис. 7. Моделирование системы при помощи пакета Simulink

На рис. 7 даны результаты моделирования системы гидирования при помощи пакета Simulink, где через $x_1(t)$ и $x_2(t)$ обозначены входные сигналы нелинейностей в отдельных каналах. Моделирование дает следующие значения параметров автоколебаний: $A_1 = 11.72$, $A_2 = 7.96$, $\Omega_+ = 39.56$. Погрешность численных расчетов по всем параметрам по отношению к результатам моделирования не превышает 1.5 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dorf R.C., Bishop R.H.** Modern Control Systems.-13th ed.-Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.- 831 p.
2. **Skogestad S. and Postlethwaite I.** *Multivariable Feedback Control. Analysis and Design.*- John Wiley and Sons Ltd., Chichester, Sussex, UK, 2005.- 608 p.
3. **Gasparyan O.N.** *Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach.*- John Wiley and Sons, West Sussex, Chichester, UK, 2008.-374 p;
4. **Popov E.P.** *The Dynamics of Automatic Control Systems.*-Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass, 1962.- 364 p.
5. **Гаспарян О.Н.** Прикладные методы исследования нелинейных многомерных систем регулирования. – Ереван: Асогик, 2011.- 339 с.
6. **Gelb and Vander Velde W.** *Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design.* - McGraw-Hill, New York, 1968.

Օ.Ն. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Լ.Մ. ԲՈՒՆԻԱԹՅԱՆ, Ա.Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ
ԻՆՔՆԱՏԱՏՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԵՐԿՉԱՓ
ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

Առաջարկվում է առանձին կապուղիներում միևնույն փոխանցման ֆունկցիաներով և կոշտ փոխադարձ կապերով ոչ գծային երկչափ ավտոմատ կառավարման համակարգերում համաչափ, միևնույն հաճախականությամբ ինքնատատանումների հետազոտման պարզ մեթոդ՝ հիմնված հարմոնիկ գծայնացման և բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդների վրա: Ի տարբերություն ընդհանուր մոտեցման, երբ պահանջվում է որոշել ինքնատատանումների ամպլիտուդների բոլոր վեկտորները, որոնք բավարարում են զուգահեռության պայմանը, և միաչափ բնութագրիչ համակարգերի համար ստուգվում է հարմոնիկ հավասարակշռության պայմանը, նկարագրված մոտեցման հիմքը այն տատանումների հաճախությունների և ամպլիտուդների որոշումն է, որոնց դեպքում երկու բնութագրիչ համակարգերից մեկը գտնվում է կայունության սահմանին: Ինքնատատանումների հետազոտման գործընթացը բավականին մոտ է մեկ մուտքով և մեկ ելքով ոչ գծային համակարգերի դասական հետազոտմանը: Բերված է ինքնատատանումների հետազոտման թվային օրինակ, և տրված են դինամիկ մոդելավորման արդյունքները Simulink փաթեթի միջավայրում, որոնք հաստատում են հաշվարկային տվյալները:

Առանցքային բաներ. երկչափ կառավարման համակարգ, ոչ գծային համակարգ, բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդ, ինքնատատանումների հետազոտում:

O.N. GASPARYAN, L.M. BUNIATYAN, A.A. KARAPETYAN
ANALYSIS OF SELF-OSCILLATIONS IN NONLINEAR TWO-
DIMENSIONAL CONTROL SYSTEMS

A simple method of investigation based on the harmonic linearization and the characteristic transfer function methods, of symmetric one-frequency self-oscillations in nonlinear two-dimensional control systems with identical transfer functions of separate channels and rigid cross-connections is proposed. As opposed to the general approach, in which the determination of all vectors of self-oscillations is required, with the subsequent examination of the harmonic balance condition for the one-dimensional characteristic systems, the approach presented in the article is based on the determination of those values of amplitudes and frequencies of oscillations for which one of the two characteristic systems is on the stability verge and on the simple graphic test of the collinearity condition. At that, the procedure of investigation of self-oscillations is brought maximally close to the classical procedure of investigation of nonlinear systems with a single input and single output. A numerical example of self-oscillations' investigation is given, as well as the results of dynamic simulation in the Simulink package environment that verify the calculated data are presented.

Keywords: two-dimensional control system, nonlinear system, characteristic transfer functions method, investigation of self-oscillations.