УДК 514.752 .44

В.А. МИРЗОЯН

ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ НОРМАЛЬНО ПЛОСКИХ РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Приводятся структурные теоремы для некоторых классов нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий в евклидовых пространствах.

Ключевые слова: эйнштейновы, полуэйнштейновы и полупараллельные подмногообразия, полусимметрические и риччи-полусимметрические подмногообразия.

Введение. Римановы риччи-полусимметрические многообразия характеризуются полупараллельностью тензора Риччи и являются естественными обобщениями симметрических, полусимметрических и эйнштейновых многообразий. В этой связи геометрия этих многообразий и их изометрических погружений в пространства постоянной кривизны стала предметом исследования на протяжении последних сорока лет (см. [1]-[16]). В теории риччи-полусимметрических подмногообразий одной из главных задач является задача классификации и геометрического описания. В настоящей работе формулируется ряд теорем разложения, которые дают значительное представление о локальном строении некоторых классов риччи-полусимметрических подмногообразий в евклидовых пространствах.

Основные определения. Пусть M является m-мерным гладким римановым многообразием с римановой метрикой g и римановой связностью ∇. Тензор кривизны R связности ∇ определяется равенством

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

где X, Y, Z - произвольные касательные к M векторные поля. Выражения $R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ называются операторами кривизны связности ∇. Они действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M. Например, если Q - тензорное поле типа (1,1) на M, то

$$(R(X,Y)Q)Z = R(X,Y)Q(Z) - Q(R(X,Y)Z).$$

Тензор Риччи R_1 многообразия M определяется стандартным образом: если $(e_1,...,e_m)$ — локальный базис ортонормальных касательных векторных полей на M, то для любого X полагаем $R_1(X)=\sum_{i=1}^{m}R(X,e_i)e_i$. В каждой точке $x\in M$ тензор R_1 действует как симметрический эндоморфизм касательного пространства $T_x(M)$. Если $R_1=0$, то риманово многообразие называется риччи-плоским. Если $R_1=\lambda I$, где $\lambda=const$, I − тождественное преобразование, то многообразие M называется эйнштейновым.

Тензорное поле Q, определенное на римановом многообразии M, называется параллельным, если $\nabla Q=0$ или, более подробно, $\nabla_X Q=0$ для любого X. Если же $R(X,Y)Q=0$ для любых X,Y, то тензорное поле Q называется полупараллельным.

Римановы многообразия с параллельным тензором кривизны ($\nabla R=0$) называются локально симметрическими, а с полупараллельным тензором кривизны ($R(X,Y)R=0$) – полусимметрическими. Римановы многообразия с полупараллельным тензором Риччи ($R(X,Y)R_1=0$) называются риччи-полусимметрическими. Полупараллельность тензора Риччи R_1 равносильна условию $R(X,Y)\cdot R_1=R_1\cdot R(X,Y)$, т.е. его коммутированию с операторами кривизны $R(X,Y)$.

Пусть M − риманово многообразие, а $x\in M$ − произвольная точка. Подпространство $T_x^{(0)}$ пространства $T_x(M)$, определённое равенством $T_x^{(0)}=\{X\in T_x(M); R(X,Y)=0\,\forall\, Y\in T_x(M)\}$, называется пространством дефектности в точке x, а его размерность $\mu_x=\dim T_x^{(0)}$ − индексом дефектности в этой точке. Пространство $T_x^{(0)}$ было определено С. Чженем и Н. Кюйпером [17]. Они доказали, что распределение $T^{(0)}$ (распределение дефектности) интегрируемо и вполне геодезично, а его интегральное многообразие является локально евклидовым в индуцированной метрике. Пространство $T_x^{(0)}$ всегда содержится в подпространстве собственных векторов тензора R_1, отвечающих нулевому собственному значению. Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$ относительно метрики g называется пространством кодефектности многообразия M в точке x, а его размерность — индексом кодефектности в этой точке. Пространство $T_x^{(1)}$ инвариантно относительно операторов $R(X,Y)$ и тензора R_1. Следовательно, в каждой точке $x \in M$ тензор Риччи R_1 имеет два инвариантных подпространства $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ и справедливо разложение в прямую сумму $T_x(M) = T_x^{(0)} + T_x^{(1)}$ (подробности см. в [13]).

Риманово многообразие M с ненулевым индексом дефектности в каждой точке x называется полуэйнштейновым, если его тензор Риччи R_1 на каждом инвариантном подпространстве $T_x^{(1)}$ имеет только одно ненулевое собственное значение. Примерами полуэйнштейновых многообразий являются римановы многообразия кодефектности два, а также конусы над эйнштейновыми многообразиями с отрицательными эйнштейновыми константами. Общая структурная теорема для римановых риччи–полусимметрических многообразий гласит, что гладкое риманово многообразие M удовлетворяет условию $R(X,Y)R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда оно является или двумерным, или эйнштейновым, или полуэйнштейновым, или прямым произведением (локально) таких многообразий [13].

Пусть M является m-мерным подмногообразием n-мерного евклидова пространства E_n, а $g-$ индуцированная метрика на M. Если $\widetilde{\nabla}-$ риманова связность на E_n, то для любых касательных к M векторных полей X, Y и любого нормального к M векторного поля ξ полагаем

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_2(X,Y), \quad \widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi,$$

где в правых частях $\nabla_X Y$ и $A_\xi(X)$ обозначают касательную, а $\alpha_2(X,Y)$ и $\nabla_X^\perp \xi$ — нормальную компоненты. Эти формулы называются формулами Гаусса и Вейнгартена соответственно. Связность ∇ является связностью Леви-Чивита индуцированной на M метрики g, а α_2 — билинейной симметрической формой, определённой на $T(M) \times T(M)$ ($T(M)$ — касательное расслоение) со значениями в нормальном расслоении $T^\perp(M)$. Форма α_2 называется второй фундаментальной формой подмногообразия M. Выражение $A_\xi(X)$ линейно по каждому аргументу и связано с α_2 по формуле

$g\left(A_\xi(X),\, Y\right)=\langle\alpha_2(X,Y),\, \xi\rangle$, где $\langle\ ,\ \rangle$ – скалярное произведение в E_n. Отсюда следует, что в каждой точке $x\in M$ для любого $\xi\in T_x^{\perp}(M)$ A_ξ является симметрическим эндоморфизмом касательного пространства $T_x(M)$. Он называется вторым фундаментальным тензором, соответствующим нормальному векторному полю ξ. В формуле Вейнгартена нормальная компонента $\nabla_X^{\perp}\xi$ от $\widetilde{\nabla}_X\xi$ определяет в $T^{\perp}(M)$ некоторую метрическую связность $\nabla^{\perp}$, называемую нормальной связностью. Тензоры кривизны R и $R^{\perp}$ связностей ∇, $\nabla^{\perp}$ определяются равенствами

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z,$$
$$R^{\perp}(X,Y)\xi=\nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}\xi-\nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}\xi-\nabla_{[X,Y]}^{\perp}\xi.$$

При $R=0$ подмногообразие M называется локально евклидовым, а при $R^{\perp}=0$ – нормально плоским. Тензор Риччи R_1 для M определяется через R так же, как и для риманова многообразия. Если $\alpha_2=0$, то подмногообразие M называется вполне геодезическим. В E_n вполне геодезическое подмногообразие является плоскостью соответствующей размерности. Как известно (см.[1]), связность $\overline{\nabla}=\nabla\oplus\nabla^{\perp}$ называется связностью Ван дер Вардена-Бортолотти. Оператор кривизны этой связности определяется равенством $\overline{R}(X,Y)=\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y-\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z-\overline{\nabla}_{[X,Y]}$. Если $\overline{R}(X,Y)\alpha_2=0$ для любых X,Y, то подмногообразие называется полупараллельным.

Изометрическое погружение $M\to E_n$ называется произведением погружений $M_\varphi\to E_{n_\varphi}$, если $M=M_1\times\cdots\times M_r$, $E_n=E_{n_1}\times\cdots\times E_{n_r}$ и любые два подпространства E_{n_φ} и E_{n_ψ} $(\varphi\neq\psi)$ ортогональны в E_n. В этом случае говорят, что M является прямым произведением подмногообразий $M_1,\cdots,M_r$ или является приводимым. Если изометрическое погружение $M=M_1\times\cdots\times M_r\to E_n$ неприводимо в E_n как подмногообразие, то оно называется сплетающимся произведением подмногообразий $M_1,\cdots,M_r$.

В вопросах локальной приводимости важную роль играет следующий признак.

Пусть в области U на подмногообразии M в E_n заданы попарно ортогональные распределения

$$\Delta_1, \cdots, \Delta_r \ \left(\Delta_1(x) + \cdots + \Delta_r(x) = T_x(U) \ \forall x \in U\right).$$

Если они параллельны в римановой связности ∇ на M и сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 (т.е. $\alpha_2(X,Y) = 0$ $\forall X \in \Delta_\varphi$ и $\forall Y \in \Delta_\psi$, $\varphi \neq \psi$), то они интегрируемы, а область U является прямым произведением их интегральных многообразий $M_1, \cdots, M_r$ [18].

V - и Z - разложения З. Сабо. Доказательство структурных теорем для риччи-полусимметрических подмногообразий основано на V - и Z -разложениях касательного пространства риманова многообразия. В этой связи напомним конструкцию этих разложений.

Пусть M – риманово многообразие и $x \in M$ – фиксированная точка. В линейном пространстве кососимметрических линейных операторов $T_x(M) \to T_x(M)$ рассмотрим линейное подпространство h_x, натянутое на элементы $R_x(X,Y)$, где $X, Y \in T_x(M)$, т.е. $h_x = span\, R_x(X,Y)$. Для произвольных двух элементов $R_x(X,Y)$ и $R_x(Z,W)$ из h_x определим коммутатор по формуле

$$[R_x(X,Y), R_x(Z,W)] = R_x(X,Y) \cdot R_x(Z,W) - R_x(Z,W) \cdot R_x(X,Y).$$

Обозначим через $\overline{h}_x$ алгебру Ли, порождённую множеством h_x относительно этой операции, и пусть P_x – связная подгруппа группы изометрий в $T_x(M)$, определенная алгеброй Ли $\overline{h}_x$. Эта группа называется примитивной группой голономии в точке x. Пусть

$$T_x(M) = V_x^{(0)} + V_x^{(1)} + \cdots + V_x^{(t)}$$

является неприводимым разложением пространства $T_x(M)$ относительно P_x. Подпространства $V_x^{(\rho)}$ инвариантны относительно действия P_x и попарно вполне ортогональны. Более того, P_x действует на $V_x^{(0)}$ тривиально, а на $V_x^{(\rho)}$ $(\rho > 0)$ неприводимо. Это разложение называется V – разложением пространства $T_x(M)$. Легко показать, что $V_x^{(0)}$ совпадает с пространством дефектности $T_x^{(0)}$.

Лемма 1 (З. Сабо [5]). *На римановом многообразии M класса C^∞ существует всюду плотное открытое множество G, на котором размерности подпространств $V_x^{(\rho)}$ постоянны, $V-$разложение единственно с точностью до порядка прямых слагаемых, а соответствующие распределения $V^{(\rho)}$ обладают на G следующими свойствами:*

$$\nabla_{V^{(0)}}V^{(0)} \subseteq V^{(0)}, \qquad \nabla_{V^{(0)}}V^{(\rho)} \subseteq V^{(\rho)},\ \nabla_{V^{(\rho)}}V^{(0)} \subseteq V^{(0)} + V^{(\rho)},$$

$$\nabla_{V^{(\rho)}}V^{(\rho)} \subseteq V^{(0)} + V^{(\rho)},\ \nabla_{V^{(\rho)}}V^{(\tau)} \subseteq V^{(\tau)},\ \rho \neq \tau,\ \rho,\tau \neq 0,$$

где запись $\nabla_{V^{(\rho)}}V^{(\tau)} \subseteq V^{(\sigma)}$ обозначает, что для любых $X \in V^{(\rho)}$ и $Y \in V^{(\tau)}$ вектор $(\nabla_X Y)_x$ принадлежит $V_x^{(\sigma)}$.

Из приведённых в этой теореме включений следует, что распределения $V^{(\rho)}$, вообще говоря, неинтегрируемы и не являются параллельными на M (хотя параллельность некоторых из них не исключается). Однако их всегда можно расширить (в смысле размерности) до параллельных (и, следовательно, интегрируемых) распределений методом З. Сабо [6], суть которого состоит в следующем. Пусть $Z_x^{(\rho)}$ – подпространство в $T_x(M)$, натянутое на векторы

$$X_{1|x},\ \nabla_{X_1}X_{2|x},\ \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_{3|x}, \cdots,\ \nabla_{X_1}\cdots\nabla_{X_k}X_{k+1|x}, \cdots,$$

где все X_k принадлежат $V^{(\rho)}$, $\rho > 0$. По определению, полагаем $Z_x^{(0)} = \left(Z_x^{(1)} + \cdots + Z_x^{(t)}\right)^{\perp}$, где $(\ )^{\perp}$ обозначает ортогональное дополнение в $T_x(M)$. Легко видеть, что $Z_x^{(0)} \subseteq V_x^{(0)}$, $V_x^{(\rho)} \subseteq Z_x^{(\rho)}$, $\rho > 0$. Из включений, фигурирующих в лемме 1, следует, что расширение подпространства $V_x^{(\rho)}$, $(\rho > 0)$ до $Z_x^{(\rho)}$ происходит только за счёт подпространства $V_x^{(0)}$.

Лемма 2 (З.Сабо [5]). *Подпространства $Z_x^{(\rho)}$, $x \in G$, попарно ортогональны, и существует всюду плотное открытое множество $\overline{G} \subset G \subset M$, на котором $Z_x^{(\rho)}$ имеют постоянные размерности, а распределения $Z^{(\rho)}$ параллельны в римановой связности на M.*

Разложение $T_x(M) = Z_x^{(0)} + Z_x^{(1)} + \cdots + Z_x^{(t)}$ называется $Z-$разложением пространства $T_x(M)$.

Формулировка теорем разложения. С использованием V - и Z - разложений З. Сабо, а также ряда известных результатов о нормально плоских подмногообразиях в E_n были получены следующие результаты.

Теорема 1. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M удовлетворяет условию $R(X,Y)R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда оно является открытой частью одного из следующих подмногообразий:*

(1) нормально плоского двумерного подмногообразия,

(2) нормально плоского эйнштейнова (в частности, риччи- плоского, локально евклидова) подмногообразия,

(3) нормально плоского полуэйнштейнова подмногообразия,

(4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштейновых подмногообразий и риччи-плоского подмногообразия (возможно, нулевой размерности),

(5) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.

Из этой теоремы следует, что задача исследования и геометрического описания нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий в евклидовых пространствах в основном сводится к исследованию эйнштейновых и полуэйнштейновых подмногообразий. Полуэйнштейновы подмногообразия в виде конусов над прямым произведением сфер, представляющим собой эйнштейново многообразие, описаны в [14] - [16].

Теорема 2. *Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием в E_n с ненулевым индексом дефектности. Если собственное распределение тензора Риччи R_1, отвечающее нулевому собственному значению, является параллельным, то M разлагается в прямое произведение нормально плоских подмногообразий $M^{(1)}, \cdots, M^{(r)}$, где $M^{(1)}$ — риччи-плоское подмногообразие с таким же индексом дефектности, что и M, а каждое $M^{(\varphi)}$ $(\varphi > 1)$ является или неплоским двумерным, или эйнштейновым (но не риччи-плоским) подмногообразием.*

Теорема 3. *Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием в E_n с ненулевым индексом дефектности и пусть распределение дефектности $V^{(0)}$ является омбилическим относительно любого* *нормального векторного поля ξ, т.е. $A_\xi(X) = \lambda_\xi X \quad \forall X \in V_x^{(0)}$. Тогда M локально разлагается в прямое произведение двумерных, эйнштейновых и полуэйнштейновых нормально плоских подмногообразий.*

Следствие 1. *Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием в E_n и $\dim V^{(0)} = 1$. Тогда M разлагается в произведение так же, как и в теореме 3.*

Следствие 2. *Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием в E_n с ненулевым индексом дефектности и пусть собственное распределение Δ_1 тензора Риччи R_1, отвечающее нулевому собственному значению, является омбилическим относительно всех тензоров A_ξ, т.е. $A_\xi(X) = \lambda_\xi X \ \forall X \in \Delta_1$. Тогда M разлагается в произведение так же, как и в теореме 3.*

Пусть $\alpha_2 -$вторая фундаментальная форма подмногообразия M в E_n. Индексом относительной дефектности в точке $x \in M$ называется размерность подпространства $T'_x = \{X \in T_x(M); \alpha_2(X,Y) = 0 \, \forall Y \in T_x(M)\}$. Справедливо включение $T_x \subset T_x^{(0)}$ [17].

Теорема 4. *Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием в E_n и пусть его индекс дефектности совпадает с индексом относительной дефектности. Тогда M разлагается в прямое произведение так же , как и в теореме 3.*

Теорема 5. *Пусть M является нормально плоским минимальным риччи-полусимметрическим подмногообразием в евклидовом пространстве E_n. Тогда M разлагается в прямое произведение нормально плоских минимальных подмногообразий $M^{(1)},\dots,M^{(r)}$, где каждое $M^{(\varphi)}$ является или двумерным, или эйнштейновым, или полуэйнштейновым.*

Теорема 6. *Нормально плоское подмногообразие M в E_n имеет параллельный тензор Риччи R_1 тогда и только тогда, когда оно эйнштейново или локально разлагается в прямое произведение эйнштейновых нормально плоских подмногообразий.*

Теорема 7. *Риччи-полусимметрическое подмногообразие M с нулевым индексом дефектности в E_n является сплетающимся произведением двумер-*

ных и эйнштейновых подмногообразий с нулевым индексом дефектности. Нормально плоское риччи-полусимметрическое подмногообразие M с нулевым индексом дефектности в E_n локально является прямым произведением двумерных и эйнштейновых подмногообразий.

Теорема 8. *Каждое полупараллельное подмногообразие M с нулевым индексом дефектности в E_n локально является прямым произведением псевдоомбилических полупараллельных подмногообразий.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lumiste Ü.** Semiparallel submanifolds in space forms. - New York: Springer, 2009. -306 p.
2. **Ryan P.** Homogeneity and some curvature condition for hypersurfaces // TôhokuMath. J. -1969. - **21,** № 2. -P. 363-388.
3. **Ferus D.** Symmetric submanifolds of Euclidean space// Math. Ann. -1980. – **247,** №1. -P.81-93.
4. **Backes E, Reckziegel H.** On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature// Math. Ann. -1983. – 263**,** № 4. - P. 419-433.
5. **Szabo Z.I**. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0.$ I. The local version // J. Differential Geom. – 1982. - 17**,** № 4. – P. 531-582.
6. **Szabo Z.I.** Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0$ // Acta Sci. Math. -1984. - 47. -P**.** 321-348.
7. **Dillen F., Nölker S.** Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property// J. Reine Angew. Math. -1993. – 435. –P**.** 33-63.
8. **Tanno S.** Hypersurfaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor // Tôhoku Math. J. (2). -1969. - 21**,** №2.- P. 297-303.
9. **Sekigawa K.** On some hypersurfaces satisfying $R(X,Y)\cdot R_1 = 0$ // Hokkaido Math. J. -1972. – 1, №1.-P. 102-109.
10. **Matsuyama Y.** Complete hypersurfaces with $R\cdot S = 0$ in E^{n+1} // Proc. Amer. Math. Soc.-1983. – **88. –P.** 119-123.
11. **Мирзоян В.А.** Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric -полупараллельных подмногообразий // Изв. РАН. Сер.Матем. - 2003. -67, №5. –С.107-124.
12. **Мирзоян В.А.** Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2011. - 75, № 6. – С. 47-78.**13.**
13. **Мирзоян В.А.** Структурные теоремы для римановых Ric -полусимметрических пространств // Изв. Вузов. Математика. -1992. -№6. –С. 80-89.

14. **Мирзоян В.А.** Классификация Ric - полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах// Матем. сб. -2000. – **191,** № 9. –С. 65-80 .
15. **Мирзоян В.А**. Структурные теоремы для Ric -полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий // Матем. сб. -2006. - 197**,** № 7. -С. 47-76.
16. **Мирзоян В.А.** Классификация одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с интегрируемым распределением кодефектности // Матем. сб. -2008. -**199,** № 3. -С. 69-94.
17. **Chern S.S., Kuiper N.** Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Eudlidean Space // Ann. of. Math. – 1952. – **56,** № 3. -P. 422-430.
18. **Moor J.D.** Isometric immersions of Riemannian products // J. Differential Geom. - 1971. – 5. –P. 159-168.

Վ.Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՐԹ ՌԻՉՉԻ ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Էվկլիդեսյան տարածություններում բերվում են կառուցվածքային թեորեմներ նորմալ հարթ Ռիչչի կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների որոշ դասերի համար:

Առանցքային բառեր. էյնշտեյնյան, կիսաէյնշտեյնյան և կիսազուգահեռ ենթաբազմաձևություններ, կիսասիմետրիկ և ռիչչի–կիսասիմետրիկ ենթաբազմա-ձևություններ:

V.A. MIRZOYAN

DECOMPOSITION THEOREMS FOR NORMALLY FLAT RICCI-SEMISYMMETRIC SUBMANIFOLDS

Structure theorems for some classes of normally flat Ricci-semisymmetric submanifolds in Euclidean spaces are given.

Keywords: Einstein, semi-Einstein and semiparallel submanifolds, semisymmetric and ricci-semisymmetric submanifolds.