ՀՏԴ 519.652

Լ.Ձ . ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՄԻՋԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ի հայտ են բերվել անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ հանգույցների դասավորության և կշիռների արժեքների համար, որոնք երաշխավորում են ցածր աստիճանի բազմանդամների վերարտադրելիությունը ռացիոնալ միջարկման բանաձևերի միջոցով:

Առանցքային բառեր. ռացիոնալ միջարկում, միջարկման հանգույցներ և կշիռներ, բազմանդամների վերարտադրելիություն:

Դիցուք $X=\{x_k\}_0^n$–ն միմյանցից տարբեր իրական թվերի համախումբ է, իսկ $Y=\{y_k\}_0^n$–ն՝ իրական թվերի որևէ համախումբ, որը կարող է ծնված լինել որևէ f ֆունկցիայով: Լագրանժի $L(p,x)$ բազմանդամը այն ամենացածր աստիճանի բազմանդամն է, որը յուրաքանչյուր x_k հանգույցում ընդունում է y_k արժեքը: Այս խնդիրը բոլոր պարագաներում միարժեքորեն լուծելի է, ինչից էլ հետևում է, որը Լագրանժի միջարկման բանաձևը վերարտադրում է բոլոր նվազ աստիճանի բազմանդամները, այսինքն՝

$$L(p,x)\equiv p(x),\deg p\le n: \tag{1}$$

Դիցուք $\pi(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$ և $\dfrac{\pi(x)}{x-x_m}=\prod_{k=0,k\ne m}^{n}(x-x_k)$: Անցնելով սահմանի, երբ $x\to x_m$, կստանանք՝

$$\pi'(x_m)=\prod_{k=0,k\ne m}^{n}(x_m-x_k)\ne 0: \tag{2}$$

Լագրանժի միջարկման $l_m(x)=\dfrac{\pi(x)}{(x-x_m)\pi'(x_m)}$ բազմանդամը բավարարում է բիօրթոգոնալության $l_m(x_k)=\delta_{mk},m,k=0,1,\cdots,n$ պայմանը:

Ակնհայտորեն

$$L(f,x)=\pi(x)\sum_{m=0}^{n}\frac{y_m}{(x-x_m)\pi'(x_m)}, \tag{3}$$

ինչն էլ հայտնի է [1] որպես միջարկման բանաձևի առաջին բարիցենտրիկ տեսք: Քանի որ Լագրանժի միջարկման բազմանդամը վերարտադրում է ցածր աստիճանի բազմանդամները, ապա՝

$$\frac{1}{\pi(x)} = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(x-x_m)\pi'(x_m)}$$

և

$$L(f,x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{y_m}{(x-x_m)\pi'(x_m)} \Big/ \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(x-x_m)\pi'(x_m)}, \tag{4}$$

որն էլ կոչվում է [2] միջարկման բանաձևի երկրորդ (իսկական) բարիցենտրիկ տեսք:

Հիմնական արդյունքները: Դիցուք $\{\lambda_k\}_0^n$ –ն ոչ զրոյական թվերի համախումբ է: Ընդհանուր ռացիոնալ միջարկումը որոշվում է

$$L(f,x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\lambda_m y_m}{x-x_m} \Big/ \sum_{m=0}^{n} \frac{\lambda_m}{x-x_m} \tag{5}$$

բանաձևով:

Ակնհայտորեն

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{x-x_k} = \frac{q(x)}{\pi(x)},$$

որտեղ $q(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \prod_{m=0, m\neq k}^{n} (x-x_m)$, ուստի $q(x)$–ում x^n –ի գործակիցը կլինի հավասար $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k$ –ի:

$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k y_k}{x-x_k}$ գումարի համարիչը $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k y_k \prod_{m=0, m\neq k}^{n} (x-x_m)$ բազմանդամն է, որի աստիճանը չի գերազանցում n–ը, հետևապես՝ $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ –ը (5) բանաձևից ռացիոնալ ֆունկցիա է: Անցնելով սահմանի, երբ $x \to x_k$, կստանանք՝

$$r\left(x_k\right)=\frac{\lambda_k \pi'\left(x_k\right) y_k}{\lambda_k \pi'\left(x_k\right)}=y_k,$$

ինչն էլ նշանակում է, որ (5)–ը ռացիոնալ միջարկման բանաձև է:

Դիցուք $1 \leq p \leq n$ –ն բնական թիվ է: Ունենք՝

$$x^p \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{x-x_k}-\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k x_k^p}{x-x_k}=\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sum_{m=0}^{p-1} x^{p-m-1} x_k^m=\sum_{m=0}^{p-1} x^{p-m-1} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k^m:$$

Եթե հետևյալ պայմանները տեղի ունեն $\left\{\lambda_k\right\}_0^n$ կշիռների համար՝

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k^m=0, m=0,1,\cdots,p-1, \tag{6}$$

ապա՝

$$x^p \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{x-x_k}=\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k x_k^p}{x-x_k}: \tag{7}$$

Այս հավասարությունը նշանակում է, որ (5)–ը վերարտադրում է x^p միանդամը, հետևաբար՝ (5)–ը վերարտադրում է ամեն մի $P, \deg P \leq p$ բազմանդամ այն և միայն այն ժամանակ, երբ (6) պայմանները կատարվում են:

Այժմ ցույց տանք, որ (6)–ը ունի գոնե մեկ լուծում այնպես, որ ոչ մի կշիռ զրոյի հավասար չէ: Ապացույցը հիմնված է հետևյալ նույնությունների վրա:

Լեմմ: Տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^p}{\pi'\left(x_k\right)}=0, p=0,1,\cdots,n-1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^n}{\pi'\left(x_k\right)}=1.$$

Ապացույց: Համաձայն կոմպլեքս անալիզի հայտնի արդյունքի, եթե f –ը ողջ ընդլայնված կոմպլեքս $\widehat{\mathbb{C}}$ հարթության վրա, բացառությամբ վերջավոր թվով բևեռների, որոշված միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է, ապա դրա բոլոր մնացքների (ներառյալ նաև մնացքը անվերջ հեռու կետում) գումարը հավասար է զրոյի:

Ունենք $\underset{z=\infty}{res} f = \lim_{z\to\infty}\left(f(\infty) - zf(z)\right)$: Սկզբում քննարկենք $f(z) = z^p / \pi(z), p = 0,1,\cdots,n$ ֆունկցիան: Քանի որ $\deg\pi = n+1$, ապա $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ և $\underset{z=\infty}{res} f(z) = -\lim_{z\to\infty} zf(z)$: Այս սահմանը հավասար է զրոյի, երբ $p \le n-1$ և 1 –ի, երբ $p = n$:

Քանի որ $\{x_k\}$ –երը $\pi(x)$–ի պարզ զրոներ են, ապա ըստ (2)–ի $\pi'(x_k) \ne 0$ և կարող ենք ընդունել՝ $\lambda_k = 1/\pi'(x_k)$:

Դիտողություն: $p = 0$ դեպքում այս հավասարությունը ապացուցվել է [3], վարժ. 7.3.9, [4], գլուխ 4 .5 և [5], թեորեմ 4.25:

Նշված մասնավոր դեպքում այն կարելի է նաև ապացուցել՝ առանց կոմպլեքս անալիզի գաղափարների օգտագործման: Իրոք, քանի որ

$$\frac{x}{\pi(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{\pi'(x_k)(x-x_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{\pi'(x_k)(x-x_k)}$$

ապա կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi'(x_k)} = 0 :$$

Նշենք նաև, որ այդ պայմանի բավարարությունը ապացուցվել է ավելի վաղ՝ [6], Պնդում 3-ում:

Պնդում 1. (5) բանաձևը վերարտադրում է բոլոր $p, \deg p \le n$ բազմանդամները, երբ նորմալացված կշիռները որոշվում են

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi'(x_k)}, k = 0,1,\cdots,n. \tag{8}$$

բանաձևերով:

Բավարարությունը հիմնված է (1) և (4) բանաձևերի վրա, իսկ անհրաժեշտության ապացույցի համար կարիք ունենք հետևյալ արդյունքի:

Պնդում 2: (8) պայմանը կատարվում է այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$V(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0, c), c \ne 0, \tag{9}$$

որտեղ V –ն Վան–դեր–Մոնդի

$$V=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ . & . & . & . \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

մատրիցն է:

Այս պնդման անհրաժեշտությունն ակնհայտ է, իսկ $c \neq 0$ պայմանի բավարարությունը հիմնված է այն փաստի վրա, որ $detV \neq 0$, ուստի (9)-ն ունի միակ լուծում, հետևաբար՝ $\lambda_k = c / \pi'(x_k) \neq 0$:

Ընդհանուր դեպքում $\Lambda = \{\lambda_k\}_0^n$ կշիռները կարող են գտնվել որպես $V\Lambda = \left\{0,0,\ldots,0,\underset{k}{1}, any\, n+1-k\ numbers\right\}$ հավասարման լուծում, որը ոչ մի կոորդինատում զրո չունի և կվերարտադրի ամեն մի բազմանդամ, որը բավարարում է $degP \leq k-1$ պայմանը:

<u>Օրինակ:</u> Դիցուք $X = \{-1,3,2,1,-2\}$: (5)-ը կվերարտադրի

ա) գծային բազմանդամները, եթե՝

$$\Lambda_1 = \{-11/24, -1/40, 1/12, 5/12, -1/60\},$$

բ) քառակուսային բազմանդամները, եթե՝

$$\Lambda_2 = \{1/6, -1/10, 7/12, -2/3, 1/60\},$$

գ) խորանարդային բազմանդամները, եթե՝

$$\Lambda_3 = \{5/24, -1/40, 1/6, -1/4, -1/10\},$$

դ) չորրորդ աստիճանի բազմանդամները, եթե՝

$$\Lambda_4 = \{-1/24, 1/40, -1/12, 1/12, 1/60\}.$$

Եթե $y_k \neq 0, k = 1,2,\cdots,n$, ապա (5) բանաձևը կարող է արտագրվել

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k} \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k / y_k}{x-x_k},$$

տեսքով, որտեղ $w_k = \lambda_k y_k$: Այդ պարագայում (6) բանաձևը դառնում է $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k / x_k^m = 0, m = 1, \cdots, p$, և (5)–ը կվերարտադրի $1/x$–ից կախված բազմանդամները:

Օրինակ: Դիցուք $X = \{1,2,3\}$: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -8, \lambda_3 = 9$ կշիռները բավարարում են

$$\frac{\lambda_1}{1} + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3} = 0,$$
$$\frac{\lambda_1}{1^2} + \frac{\lambda_2}{2^2} + \frac{\lambda_3}{3^2} = 0.$$

պայմանները և (5) բանաձևը վերարտադրում է $1/x$–ից կախված քառակուսային բազմանդամները:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Rutishauser H.** Vorlesungen über numerische Mathematik: Vol. 1, Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1976; English translation, Lectures on Numerical Mathematics /Ed. Walter Gautschi.- Birkhäuser- Boston, 1990.
2. **Schneider C., Werner W.** Some New Aspects of Rational Interpolation //Math. of Comp.-1986.-V. 47 (175).- P. 285-299.
3. **Alpay D.** A Complex Analysis Problem Book.- Second edition.- Birkhaüser/Springer, Cham, 2016. x+596 p. ISBN: 978-3-319-42179-7; 978-3-319-42181-0 MR356022
4. **Ponce-Campuzano J.** Complex Analysis: Problems with solutions, https://www.researchgate.net/publication/280722238
5. **McMullen C.** Advanced Complex Analysis, Course Notes.-Harvard University, Math 213a, 2017.
6. **Hormann K.** Barycentric interpolation /G. Fasshauer, L. Schumaker (eds). Approximation Theory XIV: San Antonio 2013//Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer, Cham.-2013.-Vol.83. –P. 1—20**.**

Л.З. ГЕВОРГЯН

ОБ ОБЩЕЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Выявлены необходимые и достаточные условия на расположение узлов и величины весов, обеспечивающие воспроизводимость многочленов меньших степеней при общей рациональной интерполяции.

Ключевые слова: рациональная интерполяция, узлы и веса интерполяции, воспроизводимость многочленов.

L.Z. GEVORGYAN

GENERAL RATIONAL INTERPOLATION

The necessary and sufficient conditions on the distribution of nodes and magnitudes of weights in general rational interpolation formula are revealed, ensuring the reproduction property of lower degree polynomials.

Keywords: rational interpolation, nodes and weights of the interpolation formula, polynomial reproducing property.

УДК 517.53

В.Г. ПЕТРОСЯН

ТЕОРЕМЫ ТИПА НЕВАНЛИННЫ ДЛЯ НОВЫХ “ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ” ЗНАЧЕНИЙ

Получены теоремы типа соотношения дефектов Р. Неванлинны для новых “исключительных” значений.

Ключевые слова: теория Р. Неванлинны, теория Л. Альфорса, свойство близости a-точек.

1. Введение. Одной из основных характеристик в классической теории распределения значений Р. Неванлинны является функция приближения (см.[1])

$$m(r,a)=m(r,a,w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|w\left(re^{i\varphi}-a\right)\right|^{-1}d\varphi,\ a\in\mathbb{C},$$

которая показывает, насколько близки значения мероморфной функции $w(z)$ к заданному значению $a\in\mathbb{C}$ на дугах $\Delta(r,a)=\Delta(r,a,w)=\{z:|z|=r;|w(z)-a|\le 1\}$ окружности $|z|=r$. Функция $m(r,a)$ есть норма $\left\|\ln^+|w(z)-a|^{-1}\right\|$ в метрике $L_1[0,2\pi]$.

С конца 60-ых годов активно изучается более тонкая характеристика близости $w(z)$ к a, а именно (см. [2-7]), величина

$$L(r,a)=L(r,a,w)=\max_{|z|=r}\ln^+|w(z)-a|^{-1},\ a\in\mathbb{C}.$$

Ясно, что функция $L(r,a)$ характеризует скорость приближения $w(z)$ к числу a в более сильной метрике, чем $L^1_{[0,2\pi]}$.